



Exercice 7.

2.a. $g(x) = f(x) - x$

$$g(x) = \ln(x^2+4) - x$$

$$= 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) - x$$

$$= x \left(2 \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{x} - 1 \right)$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}{x} = 0$

Par quotient de lim, on

Par produit et somme, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2.b. Soit $x \in [0; +\infty[$. g est dérivable sur $[0; +\infty[$, on a :

$$g(x) = f(x) - x$$

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1 \cdot x(x^2+4)}{1 \cdot x(x^2+4)}$$

$$g'(x) = \frac{2x - x^2 - 4}{x^2+4}$$

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x^2+4}$$

On $\forall x \in [0; +\infty[$, $x^2+4 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ ne dépend que de $-x^2+2x-4$

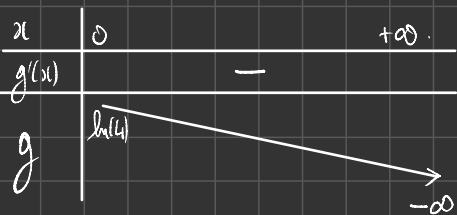
$$a = -1 \quad b = 2 \quad c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)$$

$$= 4 - 16$$

$$= -12 < 0$$

$\forall x \in [0; +\infty[$, $-x^2+2x-4 < 0$.
On en déduit les variations de g à l'aide du signe de $g'(x)$:



$$g(0) = \ln(0^2+4) - 0$$

$$= \ln(4)$$

c. g est continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

$$g(0) = \ln(4) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'éq° $g(x) = 0$ admet une sol° unique α .

d. Encadrement de α à 10^{-3} près :

$$2,158 \leq \alpha \leq 2,159$$

d'après la calculatrice.

e. On en déduit le tableau de signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-

c'est-à-dire,

$$P_{n+1}: 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

Par hypothèse de récurrence,

$$1 \leq u_n \leq \alpha \quad *$$

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$$

$$\ln(5) \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

Or, $1 < \ln(5)$, donc P_{n+1} est vraie.

* car f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Partie B.

1. La suite (u_n) semble croissante et convergente. Vers l'abscisse de l'intersection de \mathcal{C}_f et de Δ .

2. α est sol° de l'équat° $g(x) = 0$.

$$\Leftrightarrow g(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow |f(\alpha) - \alpha| = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(\alpha) = \alpha} \quad f(x) = x$$

α est donc l'intersection de \mathcal{C}_f et de Δ .

CCL: donc $1 \leq u_n \leq \alpha$.

3) a) Soit $P_n: \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \alpha$.

Initialisation: Pour $n=0$,

$$1 \leq u_0 \leq \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq u_0 \leq \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1 \leq \alpha$$

donc P_0 est vraie.

Hérédité: Pour tout entier naturel n fixé,

supposons que P_n est vraie, et montrons que P_{n+1} est vraie,

Fonction logarithme - Exercices

Exercice 1 corrigé disponible

Pour les fonctions suivantes, indiquer :

- le domaine de définition
- les limites aux bornes du domaine de définition
- l'expression de la fonction dérivée première et les variations de la fonction
- l'expression de la fonction dérivée seconde et la convexité de la fonction

$$f(x) = \ln x + 2x \qquad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

Exercice 2 corrigé disponible

Pour les fonctions suivantes, indiquer :

- le domaine de définition
- les limites aux bornes du domaine de définition
- l'expression de la fonction dérivée première

$$f(x) = \frac{\ln x + x^2}{x+1} \qquad f(x) = \ln x - \frac{x^3}{\ln x}$$

Exercice 3 corrigé disponible

Étudier les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\ln(x))}{x^2 + 1}$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x^2 \ln(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^3 + 2x^2 - x + 2}{x^3 + 7x^2 + 3x + 4}\right)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + 2x + 7}{x^3 + 3x + 4}\right)$$

Exercice 4 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminé l'ensemble de définition.

$$1. \ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) = 0$$

$$2. \ln(4x+2) - \ln(x-1) = \ln x$$

$$3. \ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(x-3)$$

$$4. 2\ln^2(x) - \ln(x) - 3 < 0$$

$$5. \ln\left(\frac{5-4x}{x+3}\right) = 1$$

Exercice 5 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminé l'ensemble de définition.

$$1. \frac{1}{2} \ln(x+3) = \ln(x+1)$$

$$2. \ln^2(x) - 7\ln(x) + 12 \leq 0$$

$$3. \ln(x^2 - 4) \leq \ln(2) + \ln(x)$$

$$4. (7x-5)\ln(x+1) > 0$$

$$5. \ln(5-x) - \ln(3) + \ln(x-1) \leq 0$$

Exercice 6 corrigé disponible

Pour chacune des fonctions suivantes :

- Déterminer le domaine de définition, étudier les limites
- Dresser le tableau de variation
- Étudier la convexité

$$1. f: x \rightarrow \frac{1}{\ln x}$$

$$3. f: x \rightarrow \frac{-1}{\ln x - 1}$$

$$2. f: x \rightarrow \frac{1}{x} - \ln x$$

Exercice 7 corrigé disponible

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

- 1) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- 2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.
 - a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(x^2 + 4) = 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$.

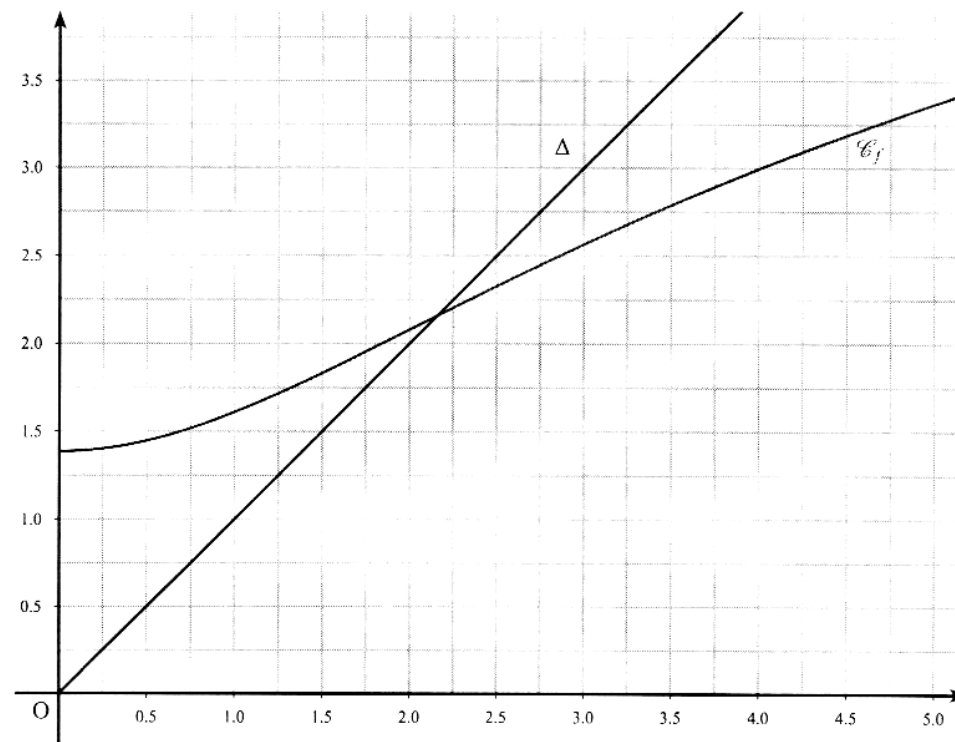
En déduire la limite de g en $+\infty$.

- b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ puis établir son tableau de variations.
- c) Montrer que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution noté α .
- d) Déterminer un encadrement de la valeur approchée de α à 10^{-3}
- e) Déduire des questions précédentes le tableau de signes de g sur $[0 ; +\infty[$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique en annexe (à rendre avec la copie).

- 1) En utilisant la courbe \mathcal{C}_f et la droite Δ , placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparaître les traits de construction. Quelle conjecture pouvez-vous faire quant aux variations de la suite (u_n) et à sa convergence ?
- 2) Placer le point I de la courbe \mathcal{C}_f qui a pour abscisse α .
- 3) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_n \leq \alpha$.
 - b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante (on pourra s'aider de la partie A). En déduire alors qu'elle converge vers ℓ
 - c) Déterminer la valeur ℓ et en donner une valeur approchée au millième.



Exercice 8 corrigé disponible

1) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) = \ln(x + 7)$ b) $\ln(3x^2 - x - 2) > \ln(6x + 4)$

- 2) a) Montrer que : $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(2x^2 - 5x + 2)$
b) En déduire les solutions de : $2 \ln^3 x - 3 \ln^2 x - 3 \ln x + 2 = 0$

Exercice 9 corrigé disponible

$$(u_n) \text{ est la suite définie par : } \begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e \sqrt{u_n} \end{cases}$$

On note (v_n) la suite définie pour tout n par : $v_n = \ln u_n - 2$.

- 1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser v_0 et sa raison r .
- 2) En déduire v_n , puis $\ln u_n$, en fonction de n .
- 3) a) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?
b) En déduire que la suite (u_n) converge vers e^2 .

Exercice 10

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes les unes des autres.

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\frac{13}{1+2e^{-2x}} = 2$.
- 2) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que : $0,91^n < 0,0001$.
- 3) Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x + 2e^{-3x})$.
- 4) h est définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \ln(e^{-x} + 2)$. Montrer que la courbe de h admet une asymptote horizontale à préciser. Etudier la position relative de la courbe représentative de h et de cette asymptote.
- 5) Soit g la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln(x+1)$, et C_g sa courbe représentative.

Déterminer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

Affirmation " La tangente à C_g en son point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ ".

- 6) Déterminer, en justifiant : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^2)$.

Exercice 11

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$;
- la tangente \mathcal{T}_A à la courbe C_f au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e} ; e\right)$;
- la tangente \mathcal{T}_B à la courbe C_f au point B de coordonnées $(1 ; 2)$.

La droite \mathcal{T}_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite \mathcal{T}_B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisses $(3 ; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 3)$.

On note f' la fonction dérivée de f .

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite \mathcal{T}_B .

3. Trouver la bonne réponse : $f'(x) \leq 0$ sur :

a) $]0 ; 0,5]$; b) $]0,5 ; +\infty[$; c) $[0,5 ; +\infty[$; d) $[e^{-1} ; +\infty[$; e) $]0 ; +\infty[$

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe C_f passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0 ; \infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f

Déterminer l'expression de $f'''(x)$ puis le plus grand intervalle pour lequel $f(x)$ est convexe

Exercice 12

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 4x - x \ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. La première conjecture de l'élève (g est à valeurs positives) est-elle vraie ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g sur $]0; +\infty[$.

1a) Rappeler $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ (on attend une démonstration).

1b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

1c) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln(x)$.

2b) Etudier le sens de variation de g sur $]0; +\infty[$, et dresser son tableau de variation complet.

Que pensez-vous de la seconde conjecture de l'élève (g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$) ?

2c) Démontrer que sur $]0; 5]$, l'équation $4x - x \ln(x) = 7$ admet une unique solution notée α que l'on encadrera à 10^{-1} près.

3a) Soit a un réel strictement positif. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g (notée C_g) en son point A d'abscisse a .

3b) Déterminer, en détaillant votre démarche, le nombre de tangentes à C_g qui passent par le point $B(1;4)$

Exercice 13

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\ln(x+1) \leq 0$

b) $4e^{3x-1} = 1$.

c) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on

ait : $\frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0,999$

2) La fonction suivante modélise le nombre de bactéries : $g(t) = 10^6 \times e^{0,25t}$, où t désigne la durée exprimée en heure.

a) Déterminer, le nombre d'individus de la population initiale.

b) Déterminer la durée nécessaire au *doublment* de la population initiale. Même question concernant son *décuplement*.

Exercice 14

Pour chaque réel a , on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1. Montrer que pour tout réel a , la fonction f_a possède un minimum.

2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?