EXO 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$

$v_{n+1} = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$

$v_{n+1} = \ln(e) + \ln(\sqrt{u_n}) - 2$

$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\ln(u_n) - 2\right)$

$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n}$

$\ln(e^b)$
b

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = \ln(u_0) - 2$

$v_0 = \ln(e^3) - 2$

$v_0 = 3 - 2$

$v_0 = 1$

2. (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = 1$. Ainsi
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$

$\boxed{v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

D'où $\ln(u_n) = v_n + 2$

$\boxed{\ln(u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

3.a. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1;1[$, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$

$\ln(u_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

$u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

$u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$

Étudions la limite de (u_n) :

D'une part $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} e^x = e^2$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^2$.

EXO 12

1) Soit $x \in]0;+\infty[$

$g(x) = 4x - x\ln(x)$

Déterminons $g(x) = 0$

$g(x) = 0 \iff 4x - x\ln(x) = 0$

$\iff 4x = x\ln(x)$

$\iff \ln(x) = 4$

$\iff e^{\ln(x)} = e^4$

$\iff x = e^4$

2] Soit $x \in]0;+\infty[$,

$4x - x\ln(x) = x(4 - \ln(x))$

Sur $]0;+\infty[$, $x > 0$. Donc le signe de $g(x)$ ne dépend que de $4 - \ln(x)$.

$4 - \ln(x) \geq 0$

$-\ln(x) \geq -4$

$\ln(x) \leq 4$

On applique la fonction e^x, croissante sur $\mathbb{R}$.

$e^{\ln(x)} \leq e^4$

$x \leq e^4$

x	0		e^4		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

3) Cette affirmation « il semble que la fonction g soit positive » est fausse car on a :

$\forall x \in [e^4;+\infty[$,

$g(x) \leq 0$

Partie B.

1.a. $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$.

Montrons que $\lim\limits_{t \to 0} t\ln(t) = 0$

$\boxed{t = \frac{1}{T}, \quad t \to 0, \quad T \to +\infty}$

$\lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\ln\left(\frac{1}{T}\right)$

$= \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\ln(T^{-1})$

$= \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{-1}{T}\ln(T)$

$= \lim\limits_{T \to +\infty} -\frac{\ln(T)}{T} = 0$.

1.b. Soit $x \in]0;+\infty[$ $g(x) = 4x - x\ln(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 4x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0 \end{array}\right\}$ Par somme de limites, on a : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

1.c $g(x) = x(4 - \ln(x))$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \ln(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Par produit de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.