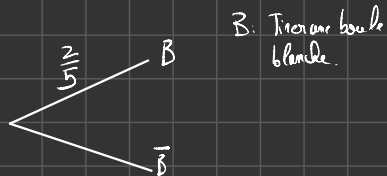


n° 7:

1. L'expérience aléatoire est bien une épreuve de Bernoulli.



On répète cette expérience 8 fois de manière indépendante. Alors, la variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de boules blanches tirées suit la loi binomiale de paramètres:

$$B\left(8; \frac{2}{5}\right)$$

2. a.  $P(X=3) = \binom{8}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{8-3}$

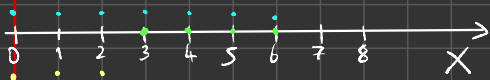
$P(X=3) = 0,2787$ . D'après la calculatrice

b.  $P(X \leq 4) = 0,8263$

c.  $P(X \geq 3) = 0,6846$

3)  $P(3 \leq X \leq 6) = 0,6761$

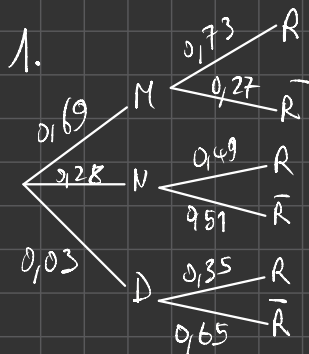
$P(X \leq 6) - P(X \leq 2)$



4)  $E(X) = n \times p = 8 \times \frac{2}{5} = 8 \times 0,4 = 3,2$

Il s'agit du nombre de boules blanches qu'on obtient en moyenne lorsqu'on répète l'expérience

Tirer huit boules un grand nombre de fois.



2.  $P(D \cap R) = P(D) \times P(R|D)$   
 $= 0,03 \times 0,35$   
 $= 0,0105$

3.  $P(M \cap \bar{R}) = P(M) \times P(\bar{R}|M)$   
 $= 0,69 \times 0,27$   
 $= 0,1863$

Lorsqu'on tire au hasard un déchet de l'entreprise, la probabilité qu'il soit non recyclable et soit minéral et non dangereux est de 0,1863.

4. D'après la formule des probabilités totales, on a:

$$P(R) = P(M \cap R) + P(N \cap R) + P(D \cap R)$$

$$P(R) = P(M) \times P_R(R) + P(N) \times P_N(R) + P(D) \times P_D(R)$$

$$P(R) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35$$

$$P(R) = 0,6514$$

5.  $P_R(N) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)} = \frac{P(N) \times P_N(R)}{P(R)}$   
 $= \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = 0,2106$   
 arrondi à  $10^{-4}$  près.

# Loi binomiale – Exercices – Devoirs

## Exercice 1 corrigé disponible

Dans une région pétrolière, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

- Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
- On effectue 9 forages.
  - Quelle hypothèse doit-on formuler pour que la variable aléatoire  $X$  correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?
  - Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à  $10^{-3}$  près.

## Exercice 2 corrigé disponible

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à  $5 \times 10^{-3}$ .

Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir

- Exactement deux résistances défectueuses ?
- Au plus deux résistances défectueuses ?
- Au moins deux résistances défectueuses ?

## Exercice 3 corrigé disponible

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.

On considère un entier positif ou nul  $n$  et on note  $X$  la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de  $n$  jours consécutifs.

- Quelle est la loi de  $X$  ?
- Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?
- Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

## Exercice 4 corrigé disponible

Indiquer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- Si  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{3}\right)$  avec  $n \geq 2$ , alors  $p(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(5; p)$  et si  $p(X = 1) = \frac{5}{3}p(X = 0)$  alors  $p(X = 2) = 3p(X = 3)$
- Si  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale avec  $E(X) = 36$  et  $\sigma(X) = 3$  alors  $p(X = 29) \approx 0,01$  à  $10^{-2}$  près.

## Exercice 5 corrigé disponible

Un QCM (questionnaire à choix multiples) est composé de cinq questions numérotées de 1 à 5. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.

**Partie A :**

Un candidat répond à ce QCM, en cochant, au hasard et de façon indépendante, chacune des 5 questions. On décide de donner au candidat un point par réponse exacte.

Soit  $X$  la variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

- Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
- Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?
- Etablir la loi de probabilité de  $X$  en complétant le tableau ci-dessous en donnant les valeurs exactes, puis arrondies au millième :

valeurs $x_i$	0					

- Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne plus de la moyenne ?
- Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM) ?

**Partie B :**

On suppose que  $n$  candidats ( $n$  entier non nul) répondent à ce QCM, et que tous le font au hasard, indépendamment des autres.

- Exprimer en fonction de  $n$  la probabilité  $p_n$  qu'au moins un candidat obtienne la note 5.
- Pour quelles valeurs de  $n$  cet événement se produira-t-il avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

## Exercice 6

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à  $p$ .

Un trajet coûte 10€ ; en cas de fraude, l'amende est de 100€. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés. On note  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

- On suppose que  $p = 0,05$ .
  - Calculer à  $10^{-4}$  près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois.
  - Soit  $Z$  la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Théo. Justifier que

$Z = 400 - 110X$  puis calculer  $E(Z)$ .

- On ne connaît plus la valeur de  $p$ .

Pour quelles valeurs de  $p$ , la fraude systématique est-elle favorable à Théo ? Justifier.

### Exercice 7

Une urne contient trois boules jaunes et deux boules blanches.

On tire successivement et avec remise huit boules de l'urne et on appelle  $X$  la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues.

Les probabilités seront données à  $10^{-4}$  près.

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir :
  - a. Trois boules blanches.
  - b. Au plus quatre boules blanches.
  - c. Au moins trois boules blanches.
3. Déterminer  $P(3 \leq X \leq 6)$ .
4. Calculer l'espérance de  $X$  et en donner une interprétation.

### Exercice 8

Une classe de première S du lycée Jean Mermoz compte 24 élèves dont 10 filles. Leur professeure de mathématiques interroge un élève au début de chaque cours pour corriger le travail fait à la maison mais comme elle est très distraite, elle ne se rappelle jamais quels élèves elle a déjà interrogés. Soit  $n$  un entier positif ou nul. Soit  $X$  le nombre de filles interrogées lors de  $n$  cours consécutifs.

- 1) Quelle est la loi de probabilités de  $X$  ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'exactly 4 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ?  
*On pourra noter cet événement E.*
- 3) Quelle est la probabilité qu'au moins 3 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ?  
*On pourra noter cet événement F.*
- 4) Une période de combien de cours consécutifs faut-il considérer pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée durant cette période soit inférieure à 0,001 ?
- 5) Une année scolaire comporte environ 150 cours de mathématiques. A combien peut-on estimer le nombre de garçons qui seront interrogés au cours de l'année scolaire en mathématiques ?

### Exercice 9

Dans un hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle. On suppose que le nombre d'acheteurs parmi cet échantillon suit une loi binomiale.

- 1) Déterminer le nombre moyen de personnes de cet échantillon qui ont acheté un ordinateur.
- 2) Quelle est la probabilité, dans cet échantillon, qu'entre 3 et 6 personnes aient acheté un ordinateur ? (on donnera le résultat à  $10^{-3}$ )

### Exercice 10 corrigé disponible

**1** On considère un dé ayant la forme d'un tétraèdre régulier non truqué dont les faces sont notées 1, 2, 3, 4. On lance ce dé et on note le numéro de la face inférieure.

1°) Le but de cette question est de déterminer, à l'aide de la loi binomiale, un intervalle de fluctuation  $I$ , au seuil de 95 %, de la fréquence du numéro 1 dans un échantillon aléatoire de 100 lancers.

Recopier et compléter le modèle de rédaction suivant :

On note  $X$  le nombre de fois où l'on obtient le chiffre 1 dans un échantillon aléatoire de 100 lancers.

$X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n = \dots$  et  $p = \dots$ .

On cherche le plus petit entier naturel  $a$  tel que  $P(X \leq a) > 0,025$ .

On cherche le plus petit entier naturel  $b$  tel que  $P(X \leq b) \geq 0,975$ .

Pour cela, on utilise la calculatrice afin d'obtenir un tableau de valeurs de la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .

Avec la calculatrice, on trouve  $a = \dots$  et  $b = \dots$ .

Déterminer l'intervalle de fluctuation  $I$  au seuil de 95 %

2. Programmation en langage Python :

- écrire la fonction **c(n,k)** qui calcule les coefficients binomiaux
- écrire la fonction **cbinomiale(n,p,x)** qui calcule  $P(X \leq x)$  pour la loi binomiale  $B(n,p)$
- écrire un programme qui calcule l'intervalle  $I$  tel que  $I[a;b]$  avec  $P(X \leq a) > 0,025$  et  $P(X \leq b) \geq 0,975$

### Exercice 11 corrigé disponible

Un photographe animalier se poste là où un chat sauvage passe parfois à l'aube, de façon totalement aléatoire. L'un de ses collègues lui a affirmé qu'au cours des deux mois précédents le félin était passé six fois et il en a conclu que la probabilité d'apparition du chat un matin donné s'établissait à 0,1.

Notre photographe ne peut consacrer que cinq jours à cet affût mais il partira avant s'il a pu photographier le chat. Selon les services de la météo, il pleuvra le deuxième jour. Sinon, il fera beau temps.

1. Quelle est la probabilité de photographier le chat sous la pluie ?
2. Quelle est la probabilité de photographier le chat au cours de ces cinq jours ?

### Exercice 12

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera arrondie à  $10^{-3}$ .

Une petite entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque jour tiré au hasard associe le nombre d'employés absents.

1. Expliquer pourquoi  $X$  suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
  - (a)  $E_1$  : "Un jour donné, il y a exactement trois absents" ;
  - (b)  $E_2$  : "Un jour donné, il y a strictement plus de deux absents" ;
  - (c)  $E_3$  : "Un jour donné, le nombre d'absents est compris entre trois et six (bornes comprises)"
3. Calculer l'espérance mathématique notée  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .  
Que représente  $E(X)$  ?
4. On approche la loi binomiale de la question 1) par une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
Déterminer la valeur de  $\lambda$ .  
En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  de la question 2).  
Vérifier que les résultats obtenus ici sont proches de ceux obtenus à la question 2).

### Exercice 13 corrigé disponible

(Nombre de désintégrations d'une substance radioactive). Le nombre  $X$  de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poisson de paramètre 3,87.

- (a) Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.
- (b) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.
- (c) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ?

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.

Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

*Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

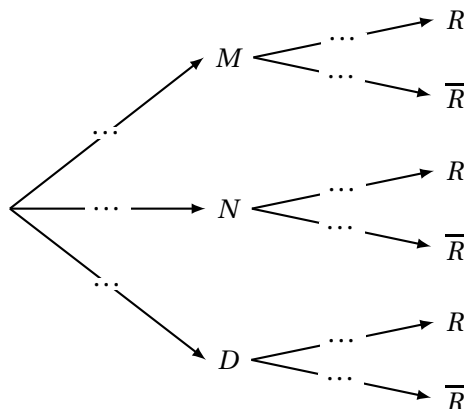
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

- $M$  : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux »;
- $N$  : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux »;
- $D$  : « Le déchet prélevé est dangereux »;
- $R$  : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note  $\bar{R}$  l'évènement contraire de l'évènement  $R$ .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



- Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
- Déterminer la probabilité  $P(M \cap \overline{R})$  et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
- Démontrer que la probabilité de l'évènement  $R$  est  $P(R) = 0,6514$ .
- On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

**Partie B**

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

- Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.  
On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.
  - On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
  - Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*
- Dans cette question, on prélève désormais  $n$  déchets, où  $n$  désigne un entier naturel strictement positif.
  - Donner l'expression en fonction de  $n$  de la probabilité  $p_n$  qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
  - Déterminer la valeur de l'entier naturel  $n$  à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

**EXERCICE 2****5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire**

On définit la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

- Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $-\infty$ .
  - Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
- On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $g'$  sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a  $g'(x) = 6e^{2x} - 2$ .
  - Étudier le signe de la fonction dérivée  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - En déduire le tableau de variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . Vérifier que la fonction  $g$  admet un minimum égal à  $\ln(3) - 2$ .

3.
  - a. Montrer que  $x = 0$  est solution de l'équation  $g(x) = 0$ .
  - b. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une deuxième solution, non nulle, notée  $\alpha$ , dont on donnera un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$ .
4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B - Étude de la fonction $f$

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a  $f'(x) = e^x g(x)$ , où  $g$  est la fonction définie dans la **partie A**.
2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée  $f'$  puis les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Pourquoi la fonction  $f$  n'est-elle pas convexe sur  $\mathbb{R}$ ? Expliquer.

### EXERCICE 3

5 points

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.*

*Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*

*Les cinq questions sont indépendantes.*

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(-1; 2; 5)$ ,  $B(3; 6; 3)$ ,  $C(3; 0; 9)$  et  $D(8; -3; -8)$ .

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. ABC est un triangle :
  - a. isocèle rectangle en A
  - b. isocèle rectangle en B
  - c. isocèle rectangle en C
  - d. équilatéral
2. Une équation cartésienne du plan (BCD) est :
  - a.  $2x + y + z - 15 = 0$
  - b.  $9x - 5y + 3 = 0$
  - c.  $4x + y + z - 21 = 0$
  - d.  $11x + 5z - 73 = 0$
3. On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne  $x - 2y - 2z + 15 = 0$ .  
On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).  
On peut affirmer que :
  - a.  $H(-2; 17; 12)$
  - b.  $H(3; 7; 2)$
  - c.  $H(3; 2; 7)$
  - d.  $H(-15; 1; -1)$
4. Soit la droite  $\Delta$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ , avec  $t$  réel.  
Les droites (BC) et  $\Delta$  sont :
  - a. confondues
  - b. strictement parallèles
  - c. sécantes
  - d. non coplanaires

5. On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $2x - y + 2z - 6 = 0$ .  
 On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne  $x - 2y - 2z + 15 = 0$ .  
 On peut affirmer que :
- les plans  $\mathcal{P}$  et (ABC) sont strictement parallèles
  - les plans  $\mathcal{P}$  et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AB)
  - les plans  $\mathcal{P}$  et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AC)
  - les plans  $\mathcal{P}$  et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (BC)

**EXERCICE 4****5 points**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{11}{u_n} \right)$$

On admet que la suite  $(u_n)$  est bien définie.

**Partie A - Étude de la suite  $(u_n)$** 

- Donner  $u_1$  et  $u_2$  sous forme de fractions irréductibles.
- On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{11}{x} \right)$$

Démontrer que la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[\sqrt{11}; +\infty[$ .

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$ .
- En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite réelle. On note  $a$  cette limite.
- Après avoir déterminé et résolu une équation dont  $a$  est solution, préciser la valeur exacte de  $a$ .

**Partie B - Application géométrique**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère un rectangle  $R_n$  d'aire 11 dont la largeur est notée  $\ell_n$  et longueur  $L_n$

La suite  $(L_n)$  est définie par  $L_0 = 5$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

- Expliquer pourquoi  $\ell_0 = 2,2$ .
  - Établir que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

- Vérifier que la suite  $(L_n)$  correspond à la suite  $(u_n)$  de la **partie A**.
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$ .
- On admet que les suites  $(L_n)$  et  $(\ell_n)$  convergent toutes les deux vers  $\sqrt{11}$ . Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
1 def heron(n):
2     L=5
3     ℓ=2.2
4     for i in range(n):
5         L = (L+ℓ) / 2
6         ℓ = 11 / L
7     return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre  $x$  avec  $k$  décimales.

- a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour  $\ell$  et  $L$ ?
- b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.