Mercredi 31 janvier 2024 - Tale G2 spé maths - ln -

$\mathbb{R} \quad \mathbb{R}_+^*$

$x \longmapsto e^x > 0.$

① $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$

② $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad e^{\ln(x)} = x.$

③ $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$

④ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$

⑤ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

⑥ $\ln(a^b) = b\ln(a).$

⑦ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$

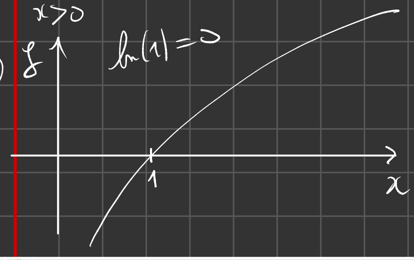
⑧ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

⑨ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty.$

⑩ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0. \quad n \in \mathbb{N}$

⑪ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0$

⑫ $\ln(1) = 0$



⑬ $f(x) = \ln(x) \;,\; x \in]0;+\infty[.$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

⑭ $f(x) = \ln(u(x)) \quad u(x) > 0.$

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$f(x) = \ln(x^2+2) \quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$

ex 9) $\quad V_n = \ln U_n - 2$

$\ln U_n =$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$V_n = \ln(U_n) - 2$

$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2$

$= \ln(e\sqrt{U_n}) - 2$

$= \ln e + \ln\sqrt{U_n} - 2$

$= \ln e + \frac{1}{2}\ln(U_n) - 2$

$= 1 + \frac{1}{2}\ln(U_n) - 2$

$= -1 + \frac{1}{2}\ln(U_n)$

$= \frac{1}{2}(\ln U_n - 2)$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

$V_0 = \ln U_0 - 2$

$= \ln e^3 - 2$

$V_0 = 1$

$q = \frac{1}{2}$

2) $V_n = V_0 \times q^n$

$V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$V_n = \ln U_n - 2$

$\ln U_n = V_n + 2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

3) a) $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$-1 < q < 1$

b) On sait que $\ln(U_n) = V_n + 2$

$\ln(U_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

$U_n = e^{V_n + 2}$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$e^{\ln(U_n)} = e^{V_n+2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(U_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

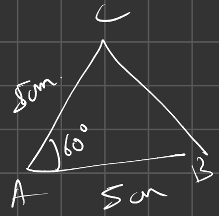
$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(U_n) = 0 + 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(U_n) = 2$

$\ln(x) = y$

$x = e^y$

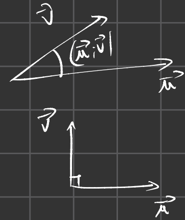
$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = e^2$



$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(60)$

$= 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

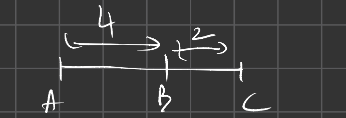


$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

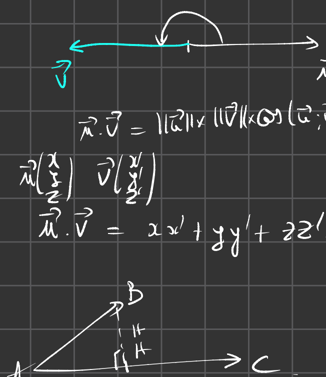
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC = 24.$



$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$



$\vec{AC}\cdot\vec{AB} = \vec{AC}\cdot(\vec{AH} + \vec{HB})$

$= \vec{AC}\cdot\vec{AH} + \underbrace{\vec{AC}\cdot\vec{HB}}_{=0}$

Orthogonalité et distances dans l'espace – Fiche de cours

1. Base orthonormée de l'espace

On appelle base orthonormée de l'espace 3 vecteurs linéairement indépendants $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ tels que : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ $\quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ $\quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

2. Orthogonalité dans l'espace

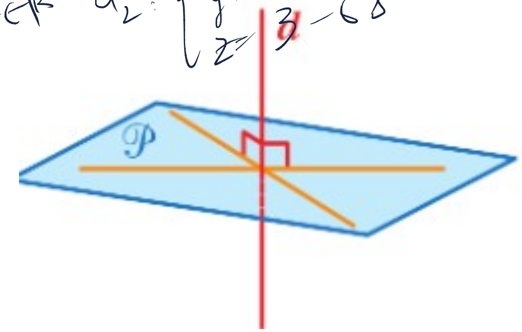
a. Orthogonalité de deux droites

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque la projection de celles-ci sur un plan sont deux droites perpendiculaires

b. Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan

$d_1 \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ $\quad d_2 : \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = 2 - 5s \quad s \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 6s \end{cases}$



Propriété : Toute droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $x \longmapsto y = f(x)$

mon op.

$(\vec{u}, \vec{v}) \xrightarrow{ps.} \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$

SEL

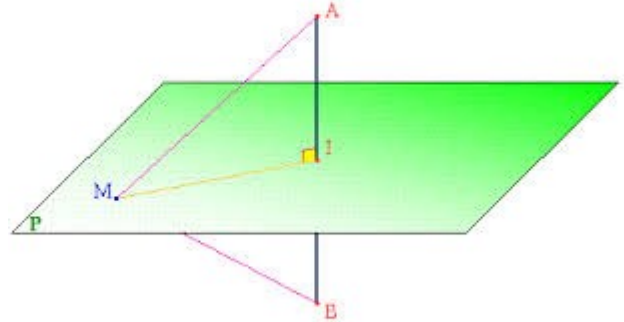
$\parallel$

c. Plan médiateur

$\pi \hat{=} 180°$

$? \quad 47°$

Le plan médiateur d'un segment désigne l'ensemble des points de l'espace équidistants de l'extrémité de ce segment.



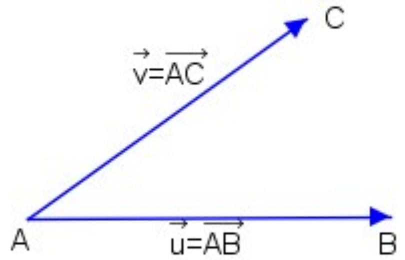
Propriété : Le plan médiateur passent le milieu d'un segment et est perpendiculaire à celui-ci.

3. Produit scalaire dans l'espace

a. Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel suivant :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

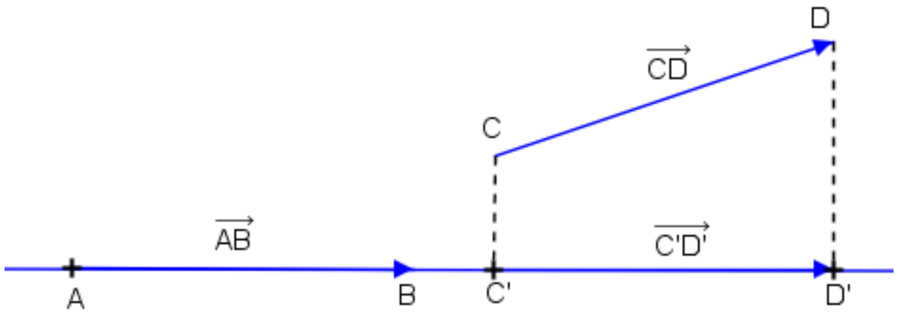


b. Autres expressions du produit scalaire

- projeté orthogonal

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs, C et D se projettent orthogonalement en C′ et D′ sur la droite (AB). On a alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}=\overline{AB}\cdot\overline{C'D'}$$



définition analytique

Si dans un repère orthonormal, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x,y,z) et (x′,y′,z′) alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

- définition de la norme (formules de polarisation)

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut être défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

On pourra utiliser la relation suivante :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

c. Propriétés de bilinéarité

- symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- bilinéarité : pour tous réels a et b

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \quad \text{et} \quad (a\cdot\vec{u})\cdot(b\cdot\vec{v})=a\cdot b\times\vec{u}\cdot\vec{v}$$

d. Critère d'orthogonalité

$$\begin{cases}\vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0}\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0\end{cases} \Leftrightarrow \vec{u}\, et\, \vec{v} \text{ orthogonaux}$$

4. Equations de droites, de plans et de sphères dans l'espace

a. Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

On définit une droite (d) de l'espace avec un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}};z_{\vec{u}})$ et un point $A(x_A;y_A;z_A)\in(d)$

La représentation paramétrique de la droite (d) est :

$$(d):\begin{cases}x=t\cdot x_{\vec{u}}+x_A\\ y=t\cdot y_{\vec{u}}+y_A\\ z=t\cdot z_{\vec{u}}+z_A\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

b. Equation cartésienne de plan

Soit un vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ normal à un plan.

Une équation cartésienne de ce plan est :

$$ax+by+cz+d=0 \quad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nuls}$$

c. Equation cartésienne de sphère

Soit $\Omega(x_\Omega,y_\Omega,z_\Omega)$ le centre d'une sphère de rayon R

Une équation cartésienne de cette sphère est :

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$$

5. Distances dans l'espace

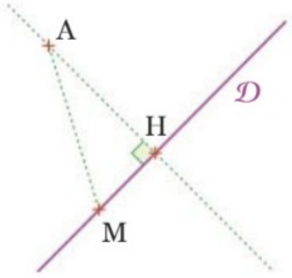
a. Distance entre 2 points

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace

On a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

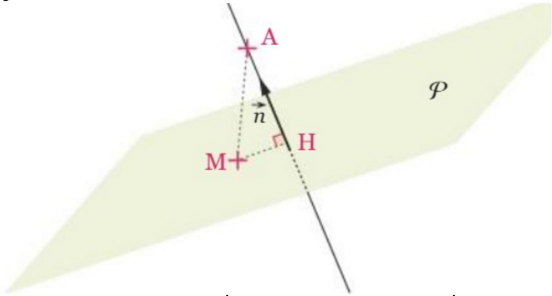
b. Distance d'un point à une droite

La distance entre un point A et une droite (d) est définie par la distance entre le point A et son projeté orthogonal H sur la droite (d).



c. Distance d'un point à un plan

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$; si l'équation cartésienne du plan de l'espace est $(P): ax+by+cz+d=0$



$$d(A,P)=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$