plus de bonnes notes — Mercredi 17 janvier 2024 - Spé maths - TG.

Exercice n°1.

$f(x) = \ln(x) + 2x$.

1) $D_f =]0; +\infty[$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0$.

Par somme de limites, on a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

$f(x) = \ln(x) + 2x$

3) Calculer $f'(x)$ et étudier les var°.

soit x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$

$f(x)' = \frac{1}{x} + 2$

$= \frac{1}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{2x+1}{x}$

or :

$x > 0$

$2x > 0$

$2x + 1 > 1 > 0$

Donc pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$

$D_f =]0; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+$

Par quotient des limites,

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{2x+1}{x}$

$f''(x) = \frac{u'}{v'} = \frac{u'v - uv'}{(v)^2}$

$f''(x) = \frac{2x - 2x - 1}{(x)^2}$

$f''(x) = \frac{-1}{(x)^2}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f''(x)$ est strictement négative donc f est concave sur $]0; +\infty[$

$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

par croissance comparée $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \times \ln(x)}{(x^2)^2}$

$= \frac{x\left(\frac{1}{x} x - 2\ln(x)\right)}{x^4}$

$= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$

Exercice n°7 :

Soit $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \ln(x^2+4)$.

$f(x) = \ln(u(x))$.

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+4}$

Or $x \in [0; +\infty[$, donc $2x \geq 0$

et $x^2 + 4 > 0$.

Par quotient, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Soit $g(x) = f(x) - x$.

Montrer que $\ln(x^2+4) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$.

$2\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$

$\ln(a^b) = b\ln(a)$

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)$

$\ln\left(x^2 \times \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)\right) = \ln(x^2 + 4)$. $\square$

CQFD.