EXO 7

Partie A.

2.d. D'après la calculatrice, on a :

$$2,158 \le \alpha \le 2,159.$$

e) Tableau de signe de g sur $[0;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	

D'après les questions précédentes.

Partie B. $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n). \\ u_0 = 1. \end{cases}$

1) Le graphique nous permet de conjecturer que :

* (u_n) est croissante.
* (u_n) converge.

2) Voir graphique. α est solution de l'éq° :

$$g(x) = 0.$$
$$f(x) - x = 0.$$
$$\boxed{f(x) = x}$$

α est sol° de $f(x) = x$.

3.a)

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, (P_n)$: "$1 \le u_n \le \alpha$"

Initialisation : On va démontrer que P_0 : "$1 \le u_0 \le \alpha$" est vraie

$1 \le 1 \le \alpha \approx 2,158$

donc P_0 est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que (P_n) : "$1 \le u_n \le \alpha$" est vraie et démontrons que (P_{n+1}) : "$1 \le u_{n+1} \le \alpha$" est vraie

(P_n) : "$1 \le u_n \le \alpha$"

On applique la fonction f croissante sur $[0;+\infty[$.

$f(x) = \ln(x^2+4)$

$f(1) = \ln(1^2+4) = \ln(5)$

$$f(1) \le f(u_n) \le f(\alpha)$$
$$1 < \ln(5) \le u_{n+1} \le \alpha$$
$$1 \le u_{n+1} \le \alpha.$$

$(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$

Conclusion : (P_n) est initialisée et héréditaire.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_n \le \alpha$.

3)b) Variations de (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \ln(u_n^2+4) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$
$$= g(u_n).$$

On $1 \le u_n \le \alpha$.

D'après le tableau de signe $g(u_n) \ge 0$.

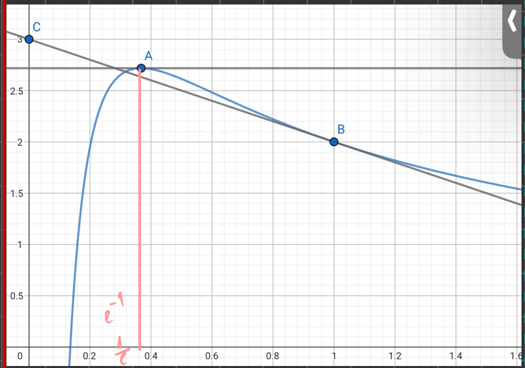
Donc $u_{n+1} - u_n \ge 0$, (u_n) est croissante.

(u_n) est croissante et majorée par α donc (u_n) converge vers ℓ

c) f est continue sur $\mathbb{R}_+$, (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$ donc :

$$f(\ell) = \ell.$$
$$\boxed{\ell = \alpha}$$

EXO 11



1. $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ car la tangente T_A en $\frac{1}{e}$ est horizontale.

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-3}{3-0} = -1.$$

2. T_B : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

T_B : $y = -1(x-1) + 2$.

$$\boxed{T_B : y = -x+3}$$

3. $f'(x) \le 0$ sur $[e^{-1};+\infty[$

On rappelle que $f'(x) \le 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante.

Partie II. Soit $]0;+\infty[$.

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

Démontrons que $A \in \mathcal{C}_f$.

$$f(x_A) = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}}$$
$$= \frac{2+\ln(e^{-1})}{\frac{1}{e}} = \frac{2-1}{\frac{1}{e}}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{e}} = e = y_A$$

$A \in \mathcal{C}_f$.

Vérifions si $B \in \mathcal{C}_f$:

$$f(x_B) = f(1) = \frac{2+\ln(1)}{1} = 2 = y_B.$$

$B \in \mathcal{C}_f$.

Démontrons que $\mathcal{C}_f$ coupe (Ox) en point unique: $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = 0.$$

$$\frac{2+\ln(x)}{x} = 0. \quad x \neq 0.$$

$$2+\ln(x) = 0.$$

$$\ln(x) = -2.$$

$$e^{\ln(x)} = e^{-2}$$

$$\boxed{x = e^{-2}}$$

$\mathcal{C}_f$ coupe donc (Ox) en point unique de coordonnées: $(e^{-2} ; 0)$.

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. Par somme, on a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 2+\ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient des limites on a: } \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$. $f(x) = \dfrac{2+\ln(x)}{x} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée.

Par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. Soit $x \in]0;+\infty[$.

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad v(x) = x$

$v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x} - 1 \times (2+\ln(x))}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-2-\ln(x)}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}}$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $-1-\ln(x)$.

$$-1-\ln(x) \geq 0.$$

$$-\ln(x) \geq 1.$$

$$\ln(x) \leq -1.$$

$$x = e^{\ln(x)} \leq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

On en déduit le tableau de variation de f à l'aide du signe de $f'(x)$:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Var° de f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. Soit $x \in]0;+\infty[$. $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$

$= \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = -1-\ln(x)$

$u'(x) = -\dfrac{1}{x}$.

$v(x) = x^2$

$v'(x) = 2x$.

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-1-\ln(x))}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x + 2x + 2x\ln(x)}{x \times x^3}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{x}(1+2\ln(x))}{\cancel{x} \times x^3}$$

$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^3 > 0$, donc le signe de $f''(x)$ ne dépend que de $1+2\ln(x)$.

$$1+2\ln(x) \geq 0.$$

$$2\ln(x) \geq -1.$$

$$\ln(x) \geq -\frac{1}{2}.$$

$$x \geq e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité		Concave		Convexe	

f est convexe sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}} ; +\infty\right[$.

Fonction logarithme – Fiche de cours

1. Définition

La réciproque de e^x s'appelle fonction logarithme népérien et est définie par :

$$\begin{cases} x \mapsto \ln x \\ ]0;+\infty[\to]-\infty;+\infty[\end{cases}$$

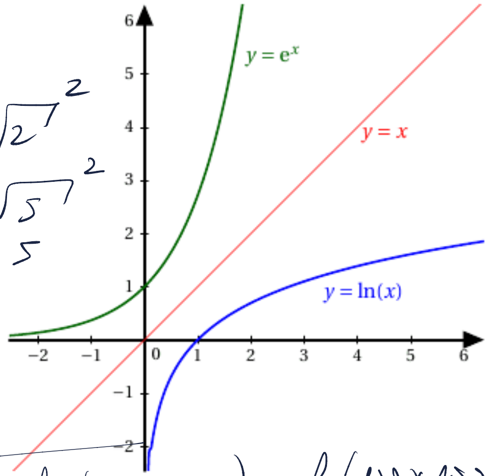
$x \mapsto e^x$

$e^x \overset{\ln}{\mapsto} x$

$\ln(e^3) = 3$ $\sqrt{2}^2$

$e^{\ln(3)} = 3$ $\sqrt{5}^2$ 5

$x \mapsto e^x > 0.$



$\ln(100\,00) = \ln(100 \times 100) = \ln(100) + \ln(100)$

$\ln(25) = \ln(5^2)$
$= 2\ln(5)$

2. Propriétés

- $x \in]0;1[$ $\ln x < 0$
- $x = 1$ $\ln x = 0$
- $x \in]1;+\infty[$ $\ln x > 0$

3. Règles de calcul

$\forall a>0\ \forall b>0\ \forall n \in \mathbb{N}$

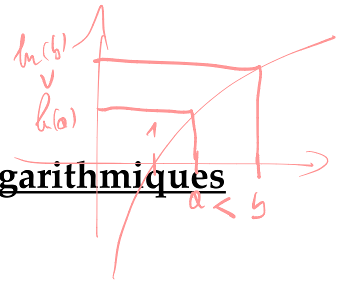
$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$ $\qquad \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ $\qquad n \cdot \ln a = \ln a^n$

$e^{a+b} = e^a \times e^b.$ $\qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$

4. Liens avec la fonction exponentielle

$\forall a \in \mathbb{R}$; $\ln e^a = a$

$\forall b \in]0;+\infty[$; $e^{\ln b} = b$



5. Equations et inéquations logarithmiques

$\forall a>0\ \forall b>0$

$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$ $\qquad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ $\qquad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b.$ $\qquad e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

6. Limites

$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \to 0+} x^n \ln x = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$

$D_f = \mathbb{R}^*.$

7. Composition de fonction

$f(x) = \ln(x^2).$

- Dérivée $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$

- Fonction associée

Soit u une fonction à valeur positives définie sur I

u et $\ln u$ ont les mêmes variations sur I

Fonction logarithme - Exercices

Exercice 1 corrigé disponible

Pour les fonctions suivantes, indiquer :
- le domaine de définition
- les limites aux bornes du domaine de définition
- l'expression de la fonction dérivée première et les variations de la fonction
- l'expression de la fonction dérivée seconde et la convexité de la fonction

$$f(x)=\ln x+2x \qquad f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$$

Exercice 2 corrigé disponible

Pour les fonctions suivantes, indiquer :
- le domaine de définition
- les limites aux bornes du domaine de définition
- l'expression de la fonction dérivée première

$$f(x)=\frac{\ln x+x^2}{x+1} \qquad f(x)=\ln x-\frac{x^3}{\ln x}$$

Exercice 3 corrigé disponible

Étudier les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin(\ln(x))}{x^2+1}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x^2\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^3+2x^2-x+2}{x^3+7x^2+3x+4}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+2x+7}{x^3+3x+4}\right)$

Exercice 4 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)=0$
2. $\ln(4x+2)-\ln(x-1)=\ln x$
3. $\ln(2x-3)+2\ln(x+1)=\ln(x-3)$
4. $2\ln^2(x)-\ln(x)-3<0$
5. $Ln\left(\frac{5-4x}{x+3}\right)=1$

Exercice 5 corrigé disponible

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminer l'ensemble de définition.

1. $\frac{1}{2}Ln(x+3)=Ln(x+1)$
2. $Ln^2(x)-7Ln(x)+12\leq 0$
3. $Ln(x^2-4)\leq Ln(2)+Ln(x)$
4. $(7x-5)Ln(x+1)>0$
5. $Ln(5-x)-Ln(3)+Ln(x-1)\leq 0$

Exercice 6 corrigé disponible

Pour chacune des fonctions suivantes :

a. Déterminer le domaine de définition, étudier les limites
b. Dresser le tableau de variation
c. Etudier la convexité

1. $f: x \to \frac{1}{\ln x}$
2. $f: x \to \frac{1}{x}-\ln x$
3. $f: x \to \frac{-1}{\ln x-1}$

Exercice 7 corrigé disponible

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2+4)$

1) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

   a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(x^2+4) = 2\ln x + \ln\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)$.

   En déduire la limite de g en $+\infty$.

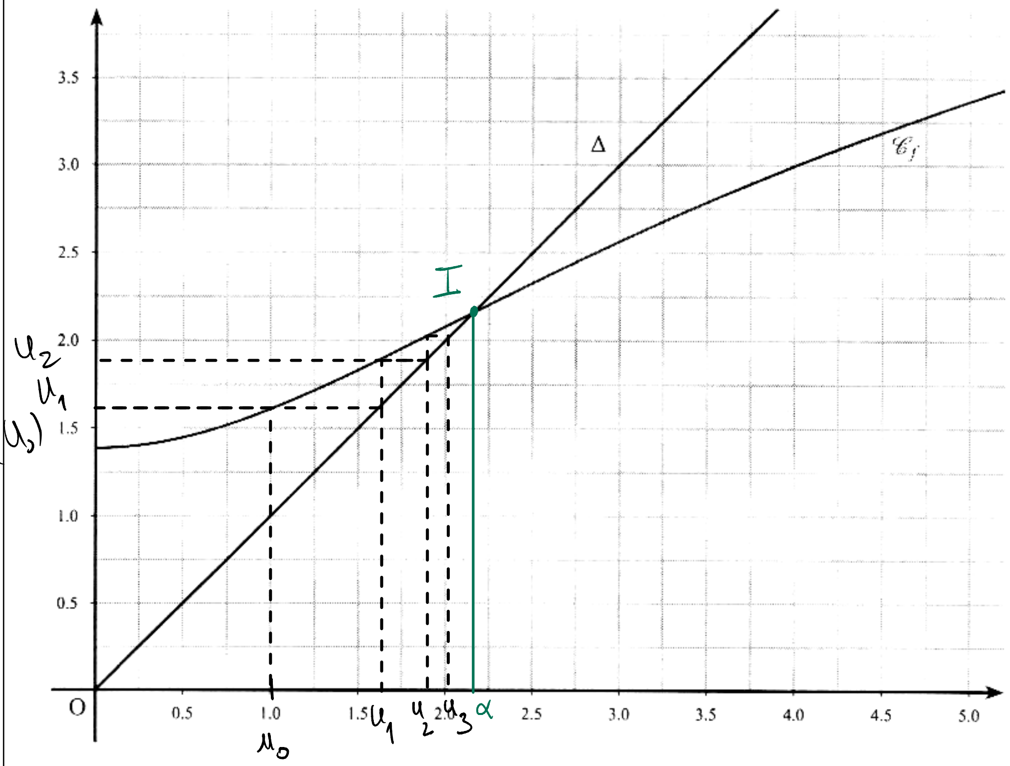
   b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ puis établir son tableau de variations.

   c) Montrer que sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution noté α.

   d) Déterminer un encadrement de la valeur approchée de α à 10^{-3}

   e) Déduire des questions précédentes le tableau de signes de g sur $[0\,;+\infty[$

$u_1 = f(u_0)$



Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique en annexe (à rendre avec la copie).

1) En utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ, placer sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparaître les traits de construction.
   Quelle conjecture pouvez-vous faire quant aux variations de la suite (u_n) et à sa convergence ?

2) Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui a pour abscisse α.

3) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante (on pourra s'aider de la partie A). En déduire alors qu'elle converge vers ℓ

   c) Déterminer la valeur ℓ et en donner une valeur approchée au millième.

Exercice 8 corrigé disponible

1) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

   a) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$ b) $\ln(3x^2 - x - 2) > \ln(6x+4)$

2) a) Montrer que : $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$

   b) En déduire les solutions de : $2\ln^3 x - 3\ln^2 x - 3\ln x + 2 = 0$

Exercice 9 corrigé disponible

(u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = e^3 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$

On note (v_n) la suite définie pour tout n par : $v_n = \ln u_n - 2$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser v_0 et sa raison r.

2) En déduire v_n, puis $\ln u_n$, en fonction de n.

3) a) Quelle est la limte de la suite (v_n) ?

b) En déduire que la suite (u_n) converge vers e^2.

Exercice 10

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes les unes des autres.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{13}{1+2e^{-2x}} = 2$.

2) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n tel que : $0{,}91^n < 0{,}0001$.

3) Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = ln(x + 2e^{-3x})$.

4) h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = ln(e^{-x} + 2)$. Montrer que la courbe de h admet une asymptote horizontale à préciser. Etudier la position relative de la courbe représentative de h et de cette asymptote.

5) Soit g la fonction définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par : $g(x) = xln(x+1)$, et C_g sa courbe représentative.

Déterminer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

Affirmation " La tangente à C_g en son point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ ".

6) Déterminer, en justifiant : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} xln(x^2)$.

Exercice 11

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$;

— la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\ ;\ e\right)$;

— la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point d coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.

On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite $\mathcal{T}_B$.

3. Trouver la bonne réponse : $f'(x) \leq 0$ sur :

a) $]0\ ;0{,}5]$; *b)* $]0{,}5\ ;+\infty[$; *c)* $[0{,}5\ ;+\infty[$; *d)* $[e^{-1}\ ;+\infty[$; *e)* $]0\ ;+\propto$

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\infty[$,
$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f

Déterminer l'expression de f''(x) puis le plus grand intervalle pour lequel f(x) est convexe

Exercice 12

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

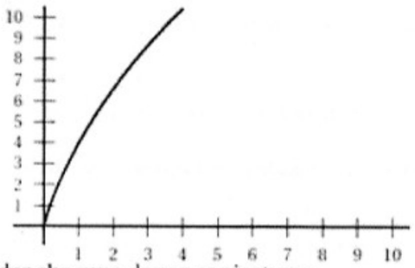
$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. La première conjecture de l'élève (g est à valeurs positives) est-elle vraie ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

1a) Rappeler $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ (on attend une démonstration).

1b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

1c) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - ln(x)$.

2b) Etudier le sens de variation de g sur $]0\,;\,+\infty[$, et dresser son tableau de variation complet.

Que pensez-vous de la seconde conjecture de l'élève (g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$) ?

2c) Démontrer que sur $]0\,;\,5]$, l'équation $4x - xln(x) = 7$ admet une unique solution notée α que l'on encadrera à 10^{-1} près.

3a) Soit a un réel strictement positif. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g (notée C_g) en son point A d'abscisse a.

3b) Déterminer, en détaillant votre démarche, le nombre de tangentes à C_g qui passent par le point B(1;4)

Exercice 13

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $ln(x+1) \leq 0$ $\qquad$ b) $4e^{3x-1} = 1$.

c) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait : $\dfrac{1}{2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0{,}999$

2) La fonction suivante modélise le nombre de bactéries : $g(t) = 10^6 \times e^{0{,}25t}$, où t désigne la durée exprimée en heure.

a) Déterminer, le nombre d'individus de la population initiale.

b) Déterminer la durée nécessaire au *doublement* de la population initiale. Même question concernant son *décuplement*.

Exercice 14

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?