

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

- a. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
  - b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. On donnera la valeur arrondie au dix-millième.
2. Dans cette question, on prélève désormais  $n$  déchets, où  $n$  désigne un entier naturel strictement positif.
- a. Donner l'expression en fonction de  $n$  de la probabilité  $p_n$  qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
  - b. Déterminer la valeur de l'entier naturel  $n$  à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

1) a)  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $B(20; 0,6514)$ .

b)  $P(X=14) = \binom{20}{14} \times 0,6514^{14} \times (1-0,6514)^{20-14}$   
 $\approx 0,1723$  (à  $10^{-4}$  près)

2. a) Désormais  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $B(n; 0,6514)$ .

$P(X=0) = \binom{n}{0} \times 0,6514^0 \times (1-0,6514)^{n-0}$   
 $= 1 \times 1 \times 0,3886^n = 0,3886^n$

2. b)  $P(X \geq 1) \geq 0,9999$

$1 - P(X=0) \geq 0,9999$   
 $1 - 0,3886^n \geq 0,9999$   
 $-0,3886^n \geq 0,9999 - 1$   
 $-0,3886^n \geq -0,0001$   
 $0,3886^n \leq 0,0001$

$\ln(0,3886^n) \leq \ln(0,0001)$   
 $n \ln(0,3886) \leq \ln(0,0001)$   
 $n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3886)} = 9,7$   
 $n \geq 10$

$x \xrightarrow{f} 3x$   
 $3x \xrightarrow{g} x$

$f(x) = \frac{1}{3}x$

$(3) \xrightarrow{g} 9$   
 $9 \xrightarrow{f} 3$

$4 \xrightarrow{g} 12$   
 $12 \xrightarrow{f} 4$

$f^{-1} = g$ . On dit que  $f$  est la fonction réciproque de  $g$ .

$x \xrightarrow{g} x+3$   
 $x+3 \xrightarrow{f} x$

$f(x) = g^{-1}(x) = x-3$

$3 \xrightarrow{g} 6$   
 $6 \xrightarrow{f} 3$

$x \xrightarrow{g} 2x+3$   
 $2x+3 \xrightarrow{f} x$

$f(x) = g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

$2 \xrightarrow{g} 7$   
 $7 \xrightarrow{f} 2$

$f(x) = x^2$   
 $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \cos(x)$   
 $g(x) = \arccos(x)$

$f(x) = \sin(x)$   
 $g(x) = \arcsin(x)$

$f(x) = \frac{1}{x}$   
 $2 \mapsto \frac{1}{2}$

$g(x) = \frac{1}{x}$   
 $(\frac{1}{2}) \mapsto \frac{1}{(\frac{1}{2})} = 2$

$x \mapsto \exp(x) = e^x$   
 $e^x \xrightarrow{\ln} x$

$3 \rightarrow e^3$   
 $e^3 \xrightarrow{\ln} 3$

$\ln(e^3) = 3$

$3 \rightarrow \ln(3)$   
 $\ln(3) \rightarrow$

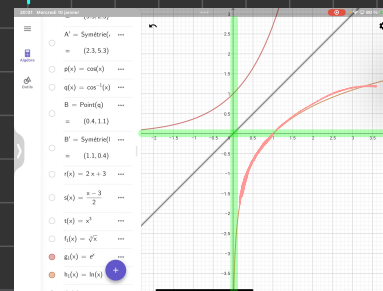
$\mathbb{R}$   
 $x \mapsto e^x$

$e^{\ln(x)} = x > 0$

$\ln(-3)$   
 $e^{-3} = -3$

$\int_0^{+\infty} \ln$

$\ln(e^{-3}) = -3$   
 $a < b$   
 $\ln(a) < \ln(b)$



$e^{\ln(x)} = x, x > 0$

$\ln(e^x) = x, x \in \mathbb{R}$

$$\ln(e^{-2}) = -2$$

$$\ln(e^3) = 3$$

$$\ln(e^{-8}) = -8$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$Df = \mathbb{R}^* \quad Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad ]0; +\infty[$$

$$f(x) = \sqrt{-2x} \quad ]-\infty; 0]$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+2}$$

$$f(x) = \ln(x) \quad Df = ]0; +\infty[$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\forall x \quad e^x > 0$$

$$f(x) = e^x \quad Df = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$$= \frac{x+2}{e^x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$$

$$= \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$$

$$\sqrt{-4} = a$$

$$a^2 = -4$$

$$x: \neq$$

$$f(x) = \ln(x) + 2x$$

$$Df: ]0; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$Df: ]0; +\infty[$$

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

5 points

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.

Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

*Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

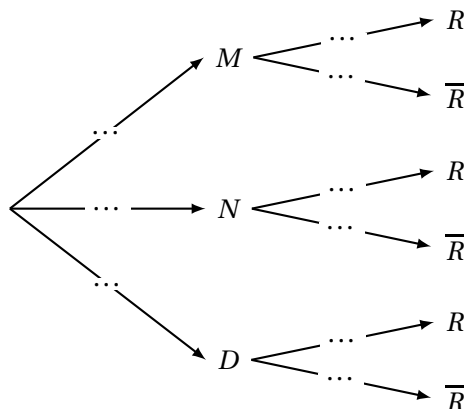
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

- $M$  : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux »;
- $N$  : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux »;
- $D$  : « Le déchet prélevé est dangereux »;
- $R$  : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note  $\bar{R}$  l'évènement contraire de l'évènement  $R$ .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
3. Déterminer la probabilité  $P(M \cap \overline{R})$  et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement  $R$  est  $P(R) = 0,6514$ .
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

### Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.  
On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.
  - a. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
  - b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*
2. Dans cette question, on prélève désormais  $n$  déchets, où  $n$  désigne un entier naturel strictement positif.
  - a. Donner l'expression en fonction de  $n$  de la probabilité  $p_n$  qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
  - b. Déterminer la valeur de l'entier naturel  $n$  à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

### EXERCICE 2

**5 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

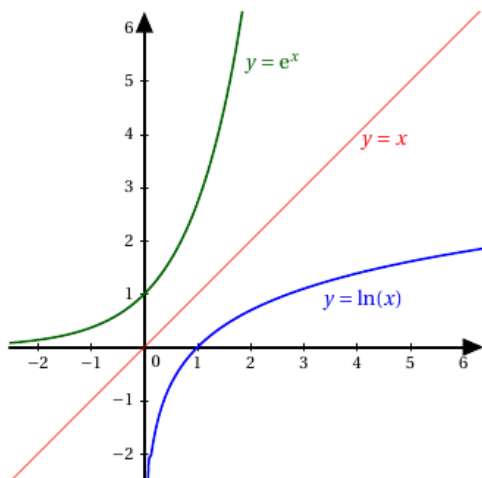
1.
  - a. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $-\infty$ .
  - b. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
2.
  - a. On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $g'$  sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , on a  $g'(x) = 6e^{2x} - 2$ .
  - b. Étudier le signe de la fonction dérivée  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - c. En déduire le tableau de variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . Vérifier que la fonction  $g$  admet un minimum égal à  $\ln(3) - 2$ .

# Fonction logarithme – Fiche de cours

## 1. Définition

La réciproque de  $e^x$  s'appelle fonction logarithme népérien et est définie par :

$$\begin{cases} x \rightarrow \ln x \\ ]0; +\infty[ \rightarrow ]-\infty; +\infty[ \end{cases}$$



## 2. Propriétés

- $x \in ]0; 1[ \Rightarrow \ln x < 0$
- $x = 1 \Rightarrow \ln x = 0$
- $x \in ]1; +\infty[ \Rightarrow \ln x > 0$

## 3. Règles de calcul

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$n \cdot \ln a = \ln a^n$$

$$e^{n \cdot a} = (e^a)^n$$

## 4. Liens avec la fonction exponentielle

$$\forall a \in \mathbb{R} ; \ln e^a = a \quad \checkmark$$

$$\forall b \in ]0; +\infty[ ; e^{\ln b} = b \quad \checkmark$$

## 5. Equations et inéquations logarithmiques

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0$$

$$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b \quad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

$$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b \quad e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

## 6. Limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

## 7. Composition de fonction

- Dérivée  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$   $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$   $f(x) = \ln(x^2 + 3)$

- Fonction associée

Soit  $u$  une fonction à valeur positives définie sur  $I$

$u$  et  $\ln u$  ont les mêmes variations sur  $I$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$f(x) = e^{2x+3}$$