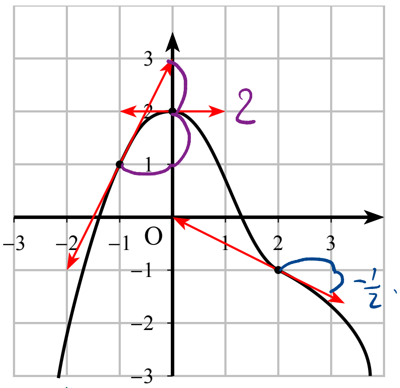
La fonction dérivée

Nombre dérivé - Interprétation graphique

EXERCICE 1

À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, donner les valeurs de :



- $f(0)$, $f(-1)$ et $f(2)$.
- $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.

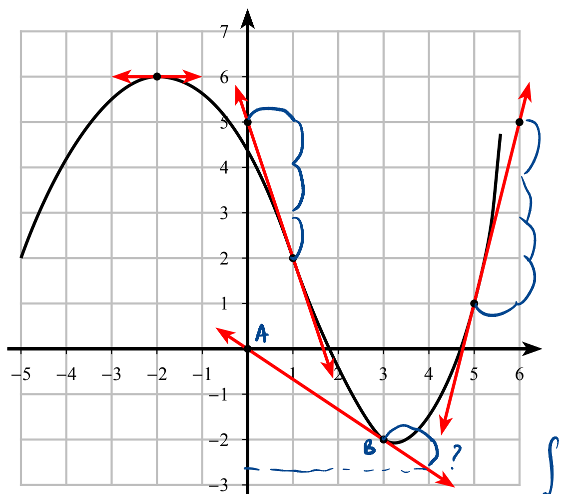
$\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f'(-1) = 2 \ (m) \end{cases}$

$\begin{cases} f(2) = -1 \\ f'(2) = -\frac{1}{2} \ (m) \end{cases}$

$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ (coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0).

EXERCICE 2

À l'aide de la représentation graphique ci-contre de la fonction f, donner les valeurs de :



- $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.
- $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.

$\begin{cases} f(-2) = 6 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} f(3) = -2 \end{cases}$

$f'(3) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-0}{3-0} = \frac{-2}{3}$. $A(0;0)$. $B(3;-2)$.

$\begin{cases} f(5) = 1 \\ f'(5) = 4. \end{cases}$

Calculs de dérivée

EXERCICE 3

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 9x - 5$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \sqrt{3}x + 1$

3) $f(x) = -1\sqrt{x} + \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = -1 \times (\sqrt{x})' + \frac{1}{2} \times (x^2)' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \times 2x = \frac{-1}{2\sqrt{x}} + x$.

4) $f(x) = \frac{x^3 + 12x - 1}{4}$

$f'(x) = \frac{1}{4} \times (x^3 + 12x - 1)'$
$= \frac{1}{4} \times ((x^3)' + (12x)' - 1')$
$= \frac{1}{4} \times (3x^2 + 12 - 0)$.
$= \frac{1}{4}(3x^2 + 12)$
$= \frac{3}{4}x^2 + 3 = 3(\frac{1}{4}x^2 + 1)$.

5) $f(x) = (7x - 2)^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
$(7x-2)^2 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 2 + 2^2$
$f(x) = 49x^2 - 28x + 4$.
$f'(x) = 49 \times (x^2)' - 28 \times x' + 0$.
$= 49 \times 2x - 28$.
$= 98x - 28 = 14(7x - 2)$.

6) $f(x) = x + \sin x$

Exo 3 : $f'(x) = (-5x^3)' + (4x^2)' - (9x)' - 5'$.

1) $f'(x) = -15x^2 + 8x - 9$.

2) $f'(x) = -\frac{1}{2} \times 4x^3 + 3 \times 3x^2 - 4 \times 2x + \sqrt{3} \times 1$

$= -2x^3 + 9x^2 - 8x + \sqrt{3}$.

Exercice 4

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

$u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x).$

1) $f(x) = \overset{u(x)}{(x-2)}\,\overset{v(x)}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \sqrt{x}\cos x$

2) $f(x) = x\sin x$

$(x-2)'\sqrt{x} + (\sqrt{x})'(x-2)$

$(x'-2')\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2).$

$1\sqrt{x} +$

Exercice 5

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

$x^1 = 1x^{1-1} = 1\times x^0 = 1\times 1 = 1$

1) $f(x) = -\dfrac{4}{x^3}$

$\dfrac{-4}{x^3} = -4\times\dfrac{1}{x^3}$

$= -4\,x^{-3}.$

2) $f(x) = \dfrac{2}{5x} - \dfrac{3x}{4}$

3) $f(x) = \dfrac{2}{3x-5}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad (\sqrt{x})^{-1}.$

5) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$

6) $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2}$

7) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$

8) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+8}{2x-5}$

9) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{4-x}$

10) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin x$

11) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

Exercice 6

Pour les fonctions suivantes calculer la fonction dérivée en précisant les valeur pour lesquelles le calcul est valable.

1) $f(x) = \sqrt{x-4}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$

3) $f(x) = (-2x+3)^4$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 7

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-5}{x+1}$$

a) Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f et g. Que remarque t-on ?

b) Calculer $f(x) - g(x)$. Justifier alors la remarque de la question a)

Exo 5 :

1) $f(x) = \dfrac{-4}{x^3} = -4x^{-3}.$

$f(x) = k\,u(x)$ avec $\begin{cases} k = -4 \\ u(x) = x^{-3}. \end{cases}$

$f'(x) = k\,u'(x).$

$= -4\,(x^{-3})'$

$= -4 \times (-3x^{-3-1})$

$= -4 \times (-3x^{-4})$

$= 12x^{-4}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{12}{x^4}}$$

2) $f(x) = \dfrac{2}{5x} - \dfrac{3x}{4}.$

$= \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{4}x.$

$f(x) = \dfrac{2}{5} \times x^{-1} - \dfrac{3}{4}x.$

$f'(x) = \dfrac{2}{5} \times (x^{-1})' - \dfrac{3}{4}\,x'.$

$$= \frac{2}{5} \times \left(-1 x^{-1-1}\right) - \frac{3}{4} \times 1.$$

$$= \frac{-2}{5} x^{-2} - \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2}{5x^2} - \frac{3}{4}.}$$

3) $f(x) = \dfrac{2}{3x-5} = 2 \times \dfrac{1}{3x-5}.$

$$= 2 \times (3x-5)^{-1}.$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}.$$

$$\begin{cases} u(x) = 2 \\ v(x) = 3x-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 0. \\ v'(x) = 3. \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{0 \times (3x-5) - 3 \times 2}{(3x-5)^2}$$

$$= \frac{0-6}{(3x-5)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-6}{(3x-5)^2}.}$$

1) $f(x) = \frac{-4}{x^3}$

$$\begin{cases} u(x) = -4 \\ v(x) = x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 0 \\ v'(x) = 3x^2. \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{0 \times x^3 - 3x^2 \times (-4)}{(x^3)^2}$$

$$= \frac{12x^2}{x^6} \qquad x^{-4} = \frac{1}{x^4}.$$

$$= \frac{12}{x^4}.$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. $\left\{ \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} \right.$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{1}{2} x^{-3/2}$.

$= \dfrac{-1}{2x^{3/2}}$.

$\begin{cases} u(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(x) = 0 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

$f'(x) = \dfrac{0 \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1}{(\sqrt{x})^2}$.

$= \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$ $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{b \times c}$,

$= \dfrac{-1}{\underbrace{2\sqrt{x} \times x}} = \dfrac{-1}{2x^{\frac{1}{2}} \times x} = \dfrac{-1}{2x^{3/2}}$.

$x \times \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \times x = x^{\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{3}{2}}$.

$x^a \times x^b$

x^{a+b}

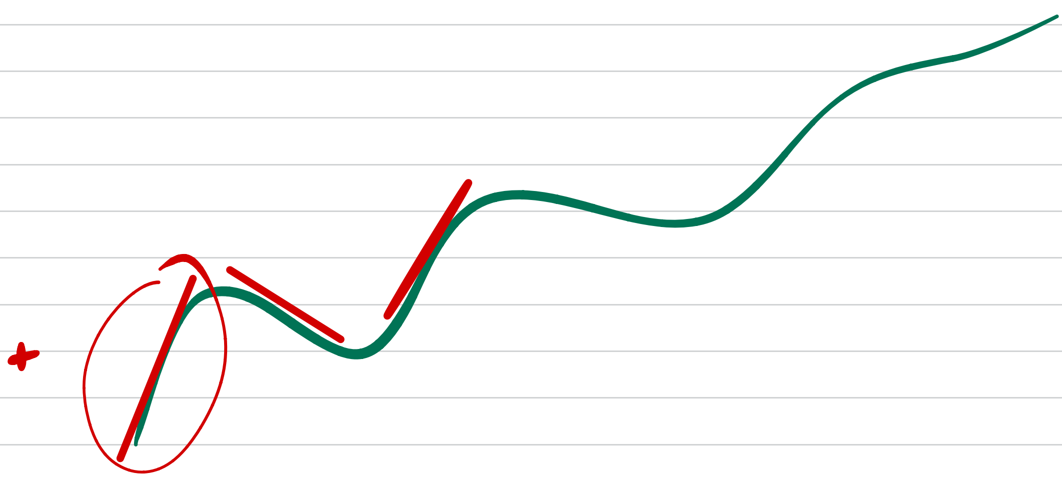
5) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$.

$$\begin{cases} u(x) = 1-2x \\ v(x) = x-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = -2 \\ v'(x) = 1. \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(x-2) - 1 \times (1-2x)}{(x-2)^2}.$$

$$= \frac{-\cancel{2x} + 4 - 1 + \cancel{2x}}{(x-2)^2}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{(x-2)^2}}$$



6) $f(x) = \dfrac{4x+7}{x^2}$

$$\begin{cases} u(x) = 4x+7 \\ v(x) = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 4. \\ v'(x) = 2x. \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4x^2 - 2x \times (4x+7)}{(x^2)^2}.$$

$$= \frac{4x^2 - 8x^2 - 14x}{x^4}.$$

$$= \frac{-4x^{\cancel{2}1} - 14\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}.$$

$$= \frac{-2x(2x+7)}{x^4}.$$

$$-4x^2 - 14x = -2 \times 2x^2 - 2 \times 7x$$

$$= -2x(2x+7).$$

Exercice 4 :

1) $f(x) = (x-2) \times \sqrt{x}$.

$$\begin{cases} u(x) = x-2 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = (x-2)' = x' - 2' \\ \qquad\qquad = 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x).$$

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2).$$

$$= \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{x}}.$$

$$= \underbrace{\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

2) $f(x) = x\sin(x)$.

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sin(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1. \\ v'(x) = \cos(x). \end{cases}$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

$$= 1 \times \sin(x) + \cos(x)\, x.$$

$$\boxed{f'(x) = \sin(x) + x\cos(x).}$$

3) $f(x) = \sqrt{x}\cos(x)$.

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = \cos(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}. \\ v'(x) = -\sin(x). \end{cases}$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos(x) - \sin(x)\sqrt{x}.}$$

Tangente

Exercice 8

Pour les fonctions suivantes déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

a) $f(x) = -x^2 + 2x - 8\,; \quad a = -2$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}\,; \quad a = -1$

c) $f(x) = x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2+1}\,; \quad a = 1$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

1) La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente en chacun de ses points. Pourquoi ?
2) a) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$
   b) Interpréter géométriquement le résultat.
3) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ a un coefficient directeur égal à 3.
4) Existe-t-il des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = cx + d$ (où c et d sont deux réels) ? Discuter en fonction de c.

Exercice 10

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $\; f(x) = \dfrac{2x}{1+x}$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative.

a) Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$.
b) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine O ?

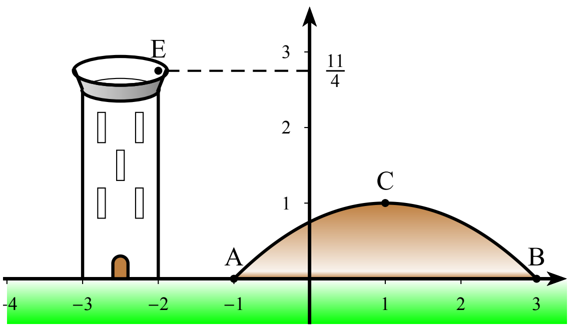
Exercice 11

Angle mort

Sur la figure ci-contre, "*l'arc*" de parabole ABC représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses.

Un observateur est placé en $\mathrm{E}\left(-2\,;\,\dfrac{11}{4}\right)$.

Le but de cet exercice est de déterminer les point de la colline et ceux du sol (au-delà de la colline) qui ne sont pas visibles du point d'observation E.



1) On note f la fonction définie sur $[-1\,;\,3]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
   Déterminer a, b, c pour que "*l'arc*" ABC soit la représentation de f.
2) a) Reproduire la figure et indiquer sur la figure les points de la colline et ceux du sol qui ne sont pas visible de E.
   b) Faire les calculs nécessaires pour trouver les abscisses de ces points.

Sens de variation

Exercice 12

Déterminer et exécuter un programme permettant de tracer 31 tangentes de paramètre $m \in [-3; 3]$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie par :
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$

On montrera que les tangentes de $\mathscr{C}_f$ en $x = m$ sont des droites (D_m) d'équations :

$$y = (m^3 - 4m)x - \frac{3}{4}m^4 + 2m^2 + 2$$

On prendra comme fenêtre : $x \in [-3; 3]$ et $y \in [-3; 5]$. On tracera ensuite $\mathscr{C}_f$.

Exercice 13

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f'(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$
2) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
3) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2$
4) $f(x) = 4x + 3 + \dfrac{9}{x-2}$
5) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 6}{x - 1}$

Exercice 14

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f'(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$
2) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 4$
3) $f(x) = -x^4 - 4x^2 + 5$
4) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{2x + 4}$
5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9}$
6) $f(x) = 2x + 1 - \dfrac{2}{x - 3}$
7) $f(x) = \dfrac{-3x}{1 + x^2}$
8) $f(x) = 1 - x - \dfrac{1}{x - 1}$
9) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 11}{x^2 - 2x - 3}$

Exercice 15

Pour les fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée, son signe en précisant l'ensemble pour lequel le calcul est valable. On cherchera à factoriser $f(x)$ lorsque cela est possible. Dresser le tableau de variation de la fonction f

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$
2) $f(x) = x\sqrt{x + 3}$
3) $f(x) = \left(\dfrac{x - 3}{x - 2}\right)^2$

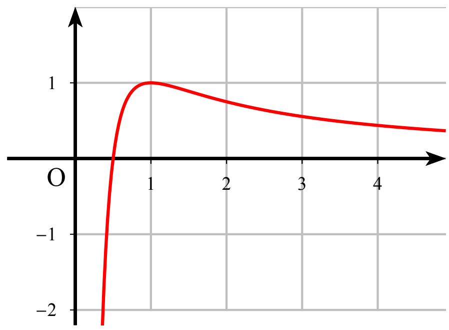
4) $f(x) = \sqrt{x-1}\,\sqrt{3-x}$ 5) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{x+3}$

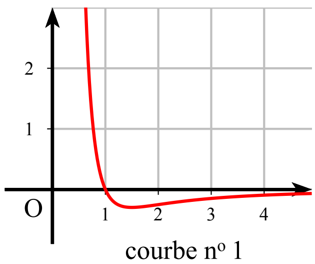
Exercice 16

Reconnaître une courbe

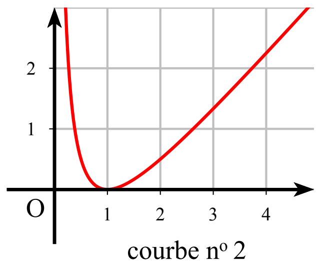
La figure ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$

Parmi les trois courbes ci-dessous, quelle est celle qui est susceptible de représenter la fonction dérivée f' de f.

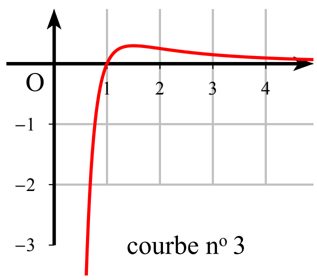




courbe n° 1



courbe n° 2



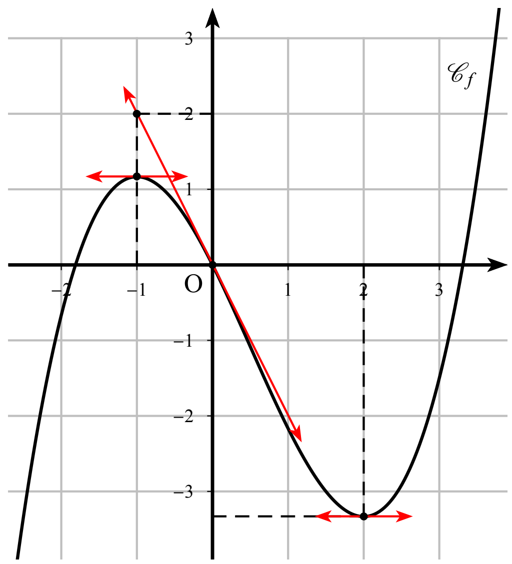
courbe n° 3

Reconnaître une fonction

Exercice 17

Soit une fonction f du 3e degré définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation $\mathscr{C}_f$ se trouve ci-après.

1) Justifier que la fonction f peut se mettre sous la forme : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2) D'après la courbe, justifier les égalités suivantes :
   - $f(0) = 0$ et $f'(0) = -2$
   - $f'(-1) = f'(2) = 0$
3) À partir des égalités de la question 2), déterminer les coefficients a, b, c et d.
4) Tracer la fonction f sur votre calculatrice pour vérifier votre solution



Exercice 18

On donne le tableau de variation de la fonction f suivant :

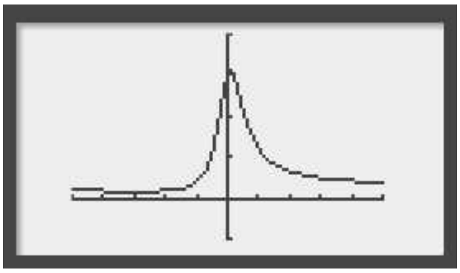
x	$-\infty$		-2		-1		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	

1) Quel est l'ensemble de définition de f ? Quel est celui de f' ?
2) f possède-t-elle des extremums locaux ?
3) 2 est-il le maximum de f ?
4) Esquisser une courbe possible pour f.

Exercice 19

Vrai-Faux

Pour la proposition suivante, dites si elle est vraie ou fausse puis justifier votre réponse



On donne la représentation, ci-contre, de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{4x^2 + 1}$$

Proposition : f admet un maximum en $x = 0$

Exercice 20

Encadrement

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + 2$.

Trouver un encadrement de la fonction f pour $x \in [-2 \,;\, 2]$

Exercice 21

Minimum

1) Étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$
2) En déduire le minimum sur $[-2; 2]$ de la fonction g définie par ;

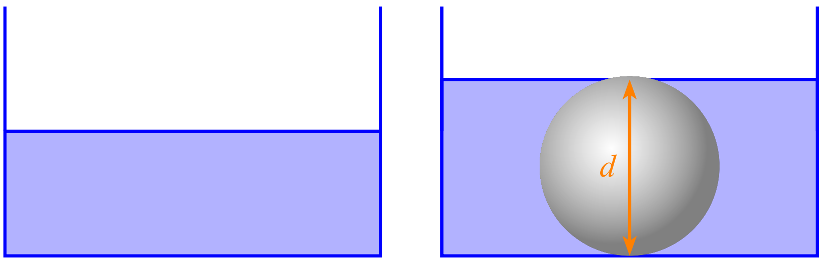
$$g(x) = \frac{1}{-x^2 + 4x - 3}$$

Optimisation

Exercice 22

Problème d'immersion

On dispose d'un récipient cylindrique de rayon 40 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 20 cm. On y plonge une bille sphérique de diamètre d (en cm) et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille. Le but de cet exercice est de calculer le diamètre d de la bille.



1) Vérifier que d est solution du système : $\begin{cases} 0 \leqslant d \leqslant 80 \\ d^3 - 9\,600d + 192\,000 = 0 \end{cases}$

2) f est la fonction sur $[0 \,;\, 80]$ par : $f(x) = x^3 - 9\,600x + 192\,000$

   a) Déterminer la dérivée de la fonction f. En déduire le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,; 80]$.
   b) D'après le tableau de variation, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0\,; 80]$.
   c) Déterminer un algorithme permettant de calculer cette solution à 10^{-2} près.

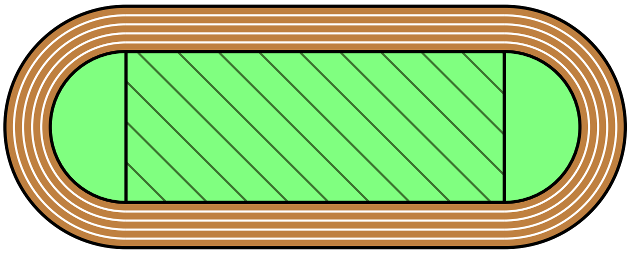
On rappelle que :

- *le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est égal à :* $\pi r^2 h$
- *le volume d'une sphère de rayon r est égal à :* $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

EXERCICE 23

Stade olympique

Un stade olympique a la forme d'un rectangle avec deux demi-cercles aux extrémités. La longueur de la piste intérieur est imposée et mesure 400 m.



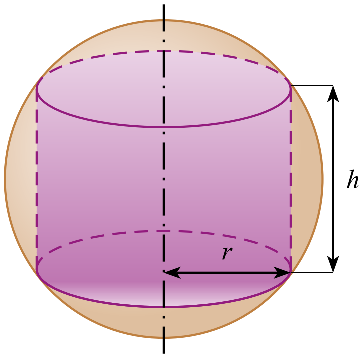
Quelle dimensions doit-on donner au stade pour que la surface rectangulaire hachurée soit maximale ?

EXERCICE 24

Cylindre inscrit dans une sphère

Dans une sphère de rayon R, on inscrit un cylindre de hauteur h.
Les deux bases du cylindre sont des cercles de la sphère de rayon r.

Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?



EXERCICE 25

Pharmacologie

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle (pavé droit) dont le volume est 576 mm^3.
On note y la hauteur et la largeur et la longueur sont respectivement x et $2x$. x et y sont exprimées en mm.

a) Calculer y en fonction de x.

b) Calculer la surface totale $S(x)$ en mm^2, de ce pavé droit en fonction de x.

c) x est nécessairement compris entre 3 et 12 mm. Étudier le sens de variation de S en fonction de x. En déduire la valeur de x qui rend S minimum.