Fonction Exponentielle
COURS

1. Définition

Unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f' = f. \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On appelle $f : x \longmapsto \exp(x)$, la <u>fonction exponentielle</u>.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x)' = \exp(x). \\ \exp(0) = 1. \end{cases}}$$

2. Propriétés

. Pour tous réels a et b, $\boxed{\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$

. On note $\exp(1) = e$, $e \approx 2{,}718$.

. <u>Conséquence</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}}).$$

Or : $\exp(1+1+\dots+1) = \exp(1)\times\exp(1)\times\dots\times\exp(1)$
(d'après le premier point).

Or : $\exp(1) = e$ (d'après le second point).

Finalement : $\exp(n) = e^n$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

($\forall$: pour tout.)

$$\boxed{\exp(x) = e^x}.$$

On définit donc la fonction exponentielle comme :

$$\boxed{f : x \longmapsto e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}.}$$

3. Propriétés algébriques.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} e^a > 0. & e^{a+b} = e^a \times e^b \\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a} & e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}. \\ (e^a)^n = e^{n\times a} & e^{\frac{a}{2}} = e^{a\times\frac{1}{2}} = (e^a)^{\frac{1}{2}}. \\ & = \sqrt{e^a}. \end{cases}$$

4. Étude de la fonction exponentielle.

A. Sens de variation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquence : $\begin{cases} x < y \iff e^x < e^y. \\ x > y \iff e^x > e^y. \end{cases}$

B. Représentation graphique

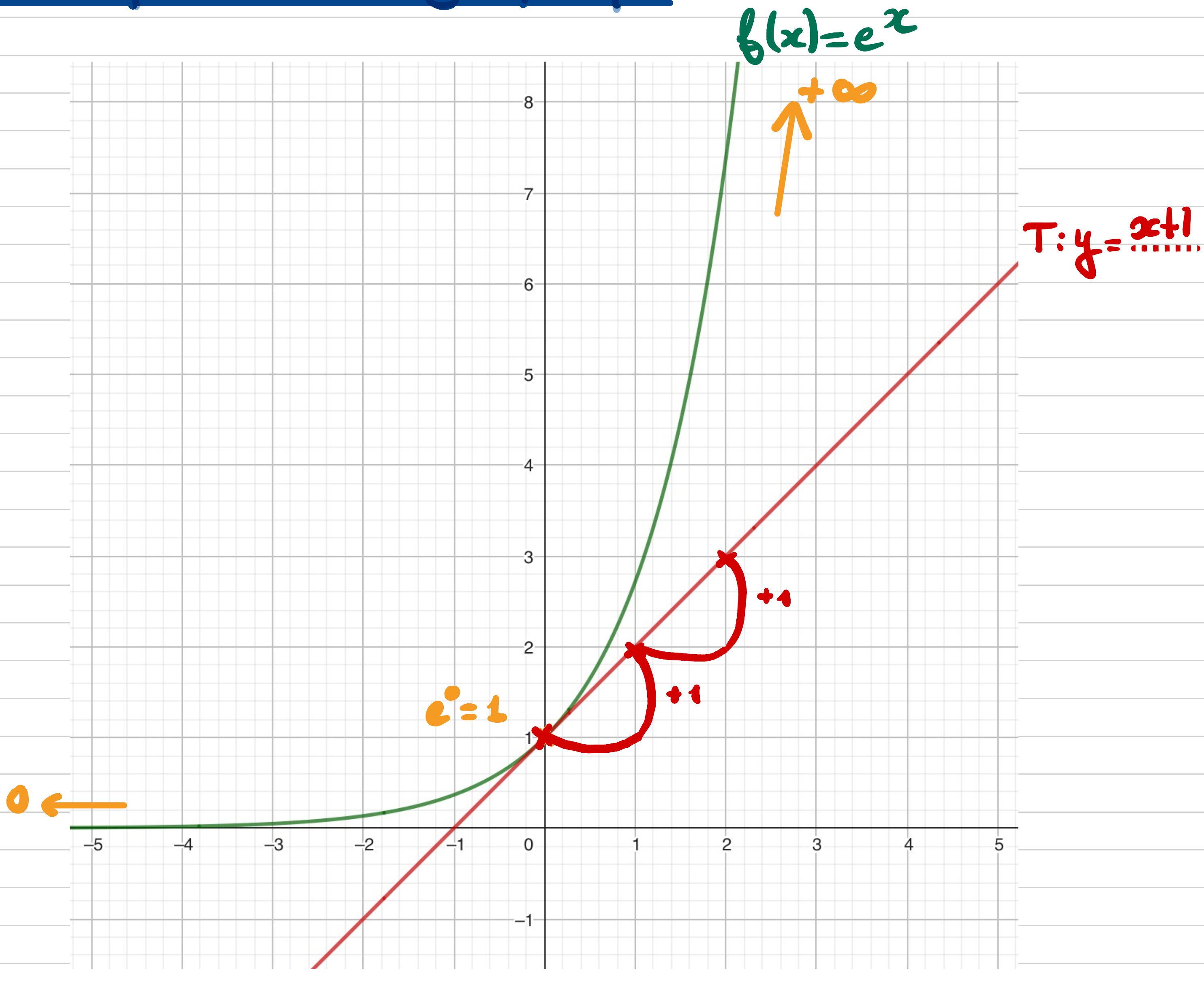


Tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Variations de f	$\nearrow$

<u>Question</u> : Que représente la droite en rouge ? → la tangente à $x \mapsto e^x$ au point d'abs. $x=0$.

Quelle est son équation ? → $y = x+1$.

En déduire $(e^x)'$ → e^x.

5. Fonctions du type e^u

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I :

La fonction f définie sur I par $\boxed{f(x) = e^{u(x)}}$

est dérivable sur I et :

$\forall x \in I$, $\boxed{f'(x) = u'(x)\, e^{u(x)}}$

$\left((e^x)' = x' e^x = 1 e^x = e^x \right)$

<u>Ex</u> : Calculer sur l'intervalle de dérivation :

1) $(e^{3x})'$ 2) $(e^{x^2})'$ 3) $(e^{3x^2-5})'$

4) $(e^{\sqrt{x}})'$ 5) $(e^{\frac{1}{x^2}})'$.

Correction :

1) $(e^{3x})' = (3x)' e^{3x} = 3e^{3x}$.

2) $(e^{x^2})' = (x^2)' e^{x^2} = 2x e^{x^2}$.

Rappel : $(x^n)' = nx^{n-1}$.

3) $(e^{3x^2-5})' = (3x^2-5)' e^{3x^2-5} = 6x e^{3x^2-5}$.

4) $(e^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$. sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Rappel : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5) $(e^{\frac{1}{x^2}})' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}$. sur $\mathbb{R}^*$.

Rappel : $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Ici : $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$.

Propriété : Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur I.

$3x \nearrow e^{3x}$

→ Prouvez-le.

$(e^{u(x)})' = u'(x)\, e^{u(x)}$. Pour étudier les var., il faut étudier $\operatorname{sgn}(u'(x)\, e^{u(x)})$.

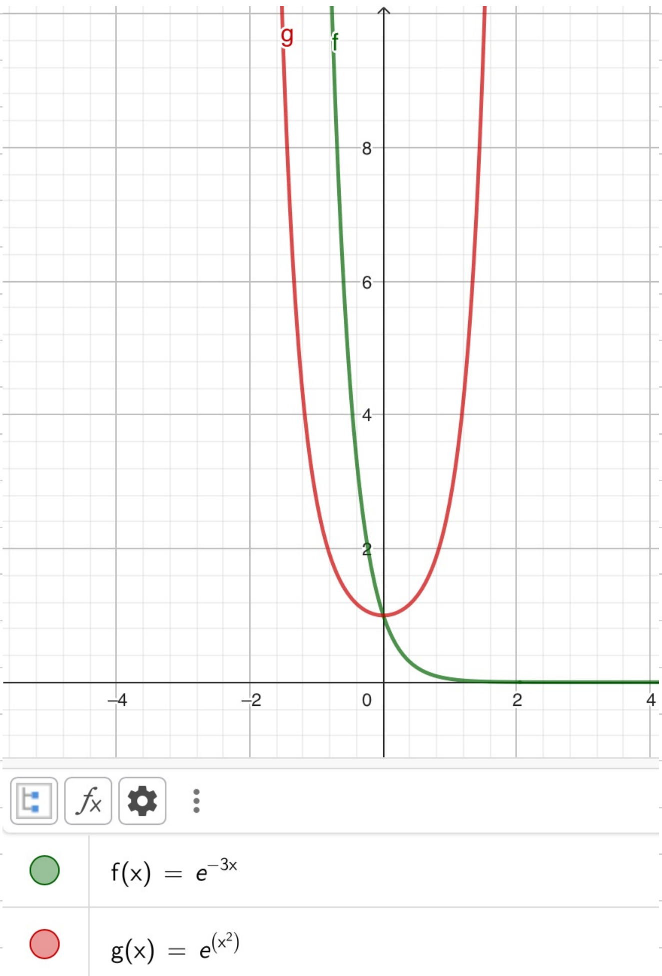
$u'(x)\, e^{u(x)} > 0 \iff u'(x) > 0$. Donc ça revient à étudier $\operatorname{sgn}(u'(x))$.

Donc ça revient à étudier les variations de u.

Exemples typiques :

$f(x) = e^{-3x}$: décroissante comme $x \mapsto -3x$ sur $\mathbb{R}$.

$g(x) = e^{x^2}$: décroissante puis croissante comme $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.



Application :

Soit $r \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, exprimer les dérivées successives de :

$$f : x \longmapsto e^{rx}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f'(x) = (rx)' e^{rx} = r e^{rx} \\ f''(x) = r \times (e^{rx})' = r \times r e^{rx} = r^2 e^{rx}. \\ f^{(3)}(x) = r^2 \times (e^{rx})' = r^2 \times r e^{rx} = r^3 e^{rx} \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = r^n e^{rx}. \end{cases}$$

Remarque : La fonction réciproque de la fonction exponentielle est la fonction logarithme népérien définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ f : x \longmapsto \ln(x).$$

$\rightsquigarrow$ on l'étudiera plus tard...

$y = x+1.$

$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $f : x \mapsto e^x.$

$= (e^x)'(a)(x-a) + e^a$

en 0 : $T_0 : y = x + 1$

$= (e^x)'(0) \times (x-0) + e^0.$

$$\begin{cases} 1 = e^0 \\ x = (e^x)'(0) \times x \end{cases}$$

Donc : $\underbrace{(e^x)'(0)}_{\underbrace{e^x(0)}_{e^0} = 1} = 1.$