Exercice 1 : PROBLÈME ÉCONOMIQUE.

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;300]$ par : $f(x) = \frac{1}{10}x^2 - 30x + 2500$.

2) En déduire que $f(x) \geq 250$.

3) Dans une entreprise, le coût total de fabrication de x unités ($x \in [0;300]$) est : $C(x) = \frac{1}{30}x^3 - 15x^2 + 2500x$

Le coût marginal $C_m(x)$ est la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire : $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$

En économie, une bonne approximation du coût marginal est :

$$\boxed{C_m(x) \approx C'(x)}.$$

a) Étudier les variations de C.

b) Pour quelle valeur de x le coût marginal est-il minimal ?

4) Le prix de vente unitaire p est une fonction de x définie sur $[0;300]$ par : $p(x) = -\frac{45}{8}x + 2750$ en euros.

a) Calculer la recette totale $R(x)$ pour la vente de x unités.

b) La recette marginale $R_m(x)$ est l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire.

i) Exprimer $R_m(x)$ en fonction de $R(x+1)$ et $R(x)$.

En Économie, une bonne approximation de $R_m(x)$ est :

$$\boxed{R_m(x) \approx R'(x)}$$

Pour quelle valeur de x la recette marginale est-elle égale au coût marginal ?

4) a) Montrer que le bénéfice pour la production et la vente de x unités est : $B(x) = -\frac{1}{30}x^3 + \frac{75}{8}x^2 + 250x$

b) Montrer que le bénéfice est maximal quand la recette marginale est égale au coût marginal.

c) Quel est alors ce bénéfice ?

5) Le coût moyen est $\frac{C(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

Étudier les variations de ce coût moyen. Pour quelle valeur de x est-il minimal ?

Corrigé :

$$f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{10}}\,x^2 - \underbrace{30}\,x + \underbrace{2500}.$$

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2}{10}x - 30 = 0{,}2x - 30.$$

$$\text{Sgn}\left(f'(x)\right) = \text{Sgn}\left(0{,}2x - 30\right).$$

$$0{,}2x - 30 > 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}2x > +30. \qquad \div 0{,}2 \qquad \frac{30}{\frac{1}{5}} = 30 \times 5.$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x > 150.}$$

Tableau de variations :

x	0		150		300
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$\searrow$		250		$\nearrow$

$$f(150) = \frac{1}{10} \times 150^2 - 30 \times 150 + 2500 = 250.$$

2) D'après le tableau de variations, le minimum de la fonction f est atteint pour $x = 150$ et vaut

250. Donc : $\boxed{f(x) \geq 250.}$

3) a) $C(x) = \frac{1}{30}x^3 - 15x^2 + 2500x.$

C est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$C'(x) = \frac{3}{30}x^2 - 30x + 2500.$

$$\boxed{C'(x) = \frac{1}{10}x^2 - 30x + 2500 = f(x).}$$

$\text{Sgn}(C'(x)) = \text{Sgn}(f(x)).$

Or, d'après la question 2, $f(x) \geq 250$ sur $[0;300]$. Donc : $f(x) > 0$ sur $[0;300]$

Donc : $C'(x) > 0$ sur $[0;300]$.

x	0		300
Signe de $C'(x)$		+	
Variations de C	0	↗	300 000

$C(300) = \frac{1}{30} \times 300^3 - 15 \times 300^2 + 2500 \times 300 = 300000$ €

b) $C_m(x) = C'(x) = f(x)$

$\min(C_m) = \min(C') = \min(f)$.

Or, d'après la question 2, $\min(f) = 250$.

atteint en $x = 150$ unités.

Donc le coût marginal est minimal pour $x = 150$ unités.

4) a) $p(x) = \dfrac{-45}{8}x + 2750$ (en €).

$R(x) = x \times p(x) = x \times \left(\dfrac{-45}{8}x + 2750\right)$

$$\boxed{R(x) = \frac{-45}{8}x^2 + 2750x.}$$

b) i) On a : $\boxed{R_m(x) = R(x+1) - R(x)}$

ii) On a : $R_m(x) \approx R'(x)$.

On cherche x tel que : $R_m(x) = C_m(x)$

Cela revient à résoudre : $R'(x) = C'(x)$. (1)

$R'(x) = \dfrac{-45}{4}x + 2750 = -11{,}25x + 2750$.

(1) revient à : $-11,25x+2750=\frac{1}{10}x^2-30x+2500$

$$-\frac{1}{10}x^2+30x-11,25x+2750-2500=0.$$

$$-\frac{1}{10}x^2+18,75x+250=0.$$

$$\Delta=b^2-4ac=18,75^2-4\times\left(\frac{-1}{10}\right)\times 250.$$

$\approx 451,56 > 0$, il y a 2 solutions réelles :

$$S_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18,75-\sqrt{451,56}}{2\times(-0,1)}\approx -12,5.$$

$$S_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-18,75+\sqrt{451,56}}{2\times(-0,1)}\approx 200.$$

On travaille sur $[0;300]$ donc la solution S_1 est exclue.

Donc la solution unique est : $\boxed{x=200}$

5) a) $B(x) = R(x) - C(x)$.

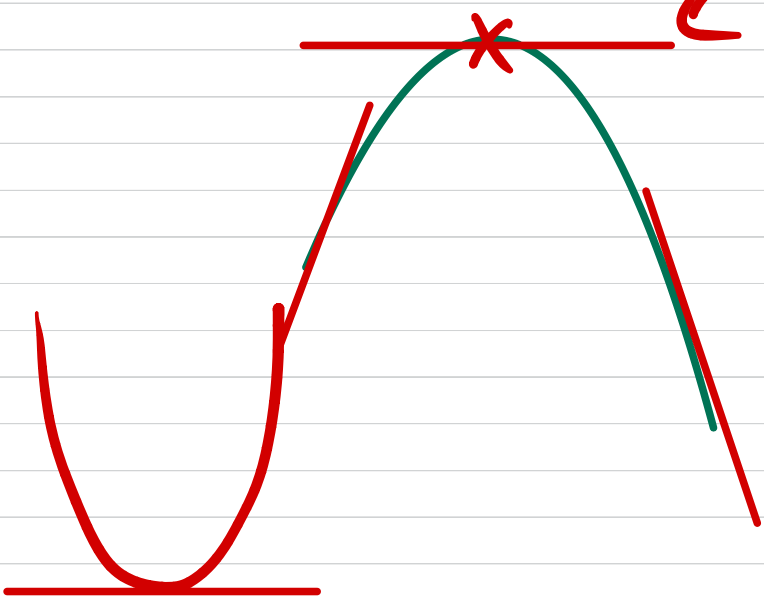
↳ " le bénéfice est égale à la recette généré par la vente de x unités (au prix unitaire $p(x)$) moins le coût de production de ces x unités."

$$B(x) = \frac{-45}{8}x^2 + 2750x - \frac{1}{30}x^3 + 15x^2 - 2500x$$

$$\boxed{B(x) = \frac{-1}{30}x^3 + \frac{75}{8}x^2 + 250x}$$

D'où le résultat. CQFD.

b) <u>Rappel</u> : ici la fonction bénéfice sera max. quand sa dérivée $= 0$.



$= 0$.

Coeff.-directeur de la tangente au point d'abscisse $x_{max} = 0$.

$$B'(x) = R'(x) - C'(x)$$
$$= R_m(x) - C_m(x).$$

Donc : $B'(x) = 0 \iff R_m(x) = C_m(x)$

D'où le résultat.

c) $B'(x) = -\dfrac{3}{30}x^2 + \dfrac{75 \times 2}{8}x + 250.$

$$\boxed{B'(x) = -0{,}1x^2 + 18{,}75x + 250.}$$

Sgn$(B'(x))$?

$\Delta = 18{,}75^2 - 4 \times (-0{,}1) \times 250 = 451{,}56.$

$\begin{cases} S_1 = -12{,}5 \\ S_2 = 200. \end{cases}$ On garde $x = 200$.

$\hookrightarrow$ le bénéfice est maximal quand $x = 200$ unités.

$$B(200) = -\frac{1}{30} \times 200^3 + \frac{75}{8} \times 200^2 + 250 \times 200.$$

$$\boxed{B(200) = 158\,333\ €.}$$

6) Coût moyen : $\dfrac{C(x)}{x}$ $(x \neq 0)$.

$$M(x) = \frac{\frac{1}{30}x^3 - 15x^2 + 2500x}{x}$$

$$M(x) = \frac{1}{30}x^2 - 15x + 2500.$$

$$M'(x) = \frac{2}{30}x - 15 = \frac{1}{15}x - 15.$$

$$\frac{1}{15}x - 15 > 0 \iff \frac{1}{15}x > 15$$

$$\iff x > 225.$$

x	0		225		300
Signe de $M'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de M	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	0

Le coût moyen est minimal en $x = 225$ unités.