Droites du plan.

équation réduite

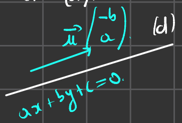
(d) : $y = ax + b$

$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

équation cartésienne

(d) $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).



EXO2

1. $\begin{cases} 3x - 7y = -9 \\ 5x + 2y = 26 \end{cases}$ Calculons le déterminant du système.

$3 \times 2 - 5 \times (-7) = 6 + 35 = 41 \neq 0$.

Le système admet une sol° unique.

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 15x - 35y = -45 \\ 15x + 6y = 78 \end{cases}$

On soustrait L_1 et L_2 :

$-41y = -123$

$y = \dfrac{-123}{-41} = \boxed{3}$

On injecte $y = 3$ dans la 1ère équation :

$3x - 7y = -9$

$3x - 7 \times 3 = -9$

$3x - 21 = -9$

$3x = -9 + 21 = 12$

$x = \dfrac{12}{3} = 4$

$\boxed{S = \{(4;3)\}}$

2) $\begin{cases} 6x - y = -17 \\ -x + 5y = 27 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 6x + 17 \\ -x + 5(6x + 17) = 27 \end{cases}$

D'où $-x + 30x + 85 = 27$

$29x = 27 - 85 = -58$

$29x = 58$

$x = \dfrac{-58}{29} = -2$

D'où $y = 6 \times (-2) + 17$

$y = -12 + 17 = 5$

$\boxed{S = \{(-2;5)\}}$

EXO4

1. $\begin{cases} m_1 + m_2 = 154 \\ \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} m_1 + m_2 = 154 \\ 8m_2 - 3m_1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} m_1 = 154 - m_2 \\ 8m_2 - 3m_1 = 0 \end{cases}$

On injecte $m_1 = 154 - m_2$ dans la 2ème éq°.

$8m_2 - 3(154 - m_2) = 0$

$8m_2 - 462 + 3m_2 = 0$

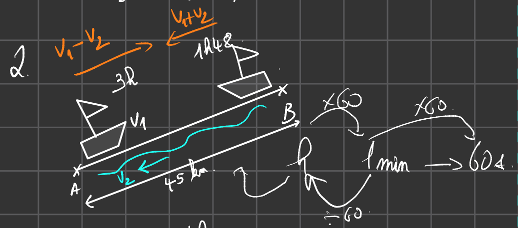
$11m_2 = 462$

$m_2 = \dfrac{462}{11} = 42$

D'où $m_1 = 154 - 42 = 112$.

$(m_1 ; m_2) = (112 ; 42)$

2.



a) 1h48 = 1h + 48 min

= 1h + $\dfrac{48}{60}$ h

= 1h + 0,8 h

1h48 = $\boxed{1{,}8\text{h}}$

$d = V \times t$.

Calculons d lors de la montée

$45 = (v_1 - v_2) \times 3$

descente : $45 = (v_1 + v_2) \times 1{,}8$

$\begin{cases} (3v_1 - 3v_2 = 45) \times 1{,}8 \\ (1{,}8v_1 + 1{,}8v_2 = 45) \times 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 5{,}4v_1 - 5{,}4v_2 = 81 \\ 5{,}4v_1 + 5{,}4v_2 = 135 \end{cases}$

$10{,}8v_1 = 216$

$v_1 = \dfrac{216}{10{,}8} = 20$ km/h

On injecte v_1 dans la 1ère éq° :

$3 \times 20 - 3 \times v_2 = 45$.

$15 = 3v_2$

$v_2 = 5$ km/h.

$\boxed{\begin{cases} v_1 = 20 \text{ km/h} \\ v_2 = 5 \text{ km/h} \end{cases}}$

$\begin{cases} (L - 60) \times (l + 20) = 400 \\ L - 80 = l + 40 \end{cases}$

$L = l + 40 + 80$

$L = l + 120$.

$(l + 120 - 60) \times (l + 20) = 400$

$(l + 60) \times (l + 20) = 400$.

Les droites du plan – Fiche de cours

1. Equation réduite

a. Définition

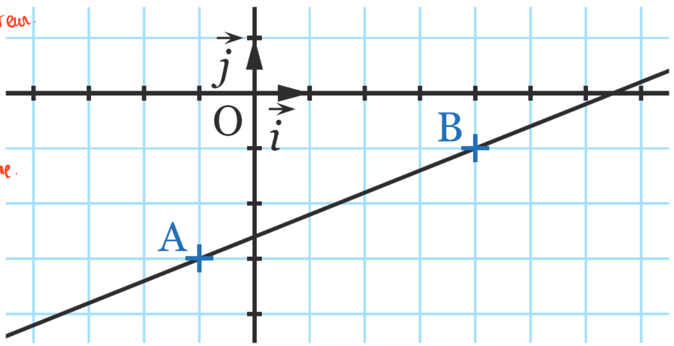
L'équation réduite d'une droite du plan est :

$x = c$ si parallèle à l'axe des ordonnées

$y = ax + b$ $\quad x \in R$ non parallèle à l'axe des ordonnées

a : coefficient directeur
pente
(inclinaison)

b : ordonnée à l'origine



Soient $A(x_A ; y_A)$ et B $(x_B ; y_B)$ deux points de la droite :

- $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- pour déterminer b, on remplace les coordonnées d'un point appartenant à la droite

2. Equation cartésienne

L'équation cartésienne d'une droite du plan est :

$$ax + by + c = 0 \qquad x \in R \qquad y \in R$$

- Méthode : on peut obtenir l'équation cartésienne d'une droite avec les coordonnées d'un vecteur directeur

Soit $M(x ; y)$ un point quelconque de la droite

Soit $A(x_A ; y_A)$ un point de la droite

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite

On écrit $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$ et l'on obtient :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0$$

3. Position relative

Soient le système de 2 droites (d) et (d') :

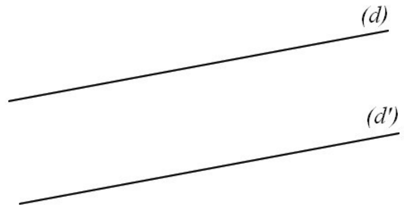
$$\begin{cases} (d) : ax + by + c = 0 \\ (d') : a' x + b' y + c = 0 \end{cases}$$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d) et $\vec{v}\,'\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d')

- Droites parallèles

Les droites (d) et(d') sont parallèles lorsque :

- leur coefficient directeur est égal
- l'on a :



$dét(\vec{u} ; \vec{u}\,') = 0$

et un point de (d) n'est pas commun à (d')

- Droites confondues

Les droites (d) et(d') sont confondues si l'on a :

$dét(\vec{u} ; \vec{u}\,') = 0$ avec un point est commun à (d) et (d')

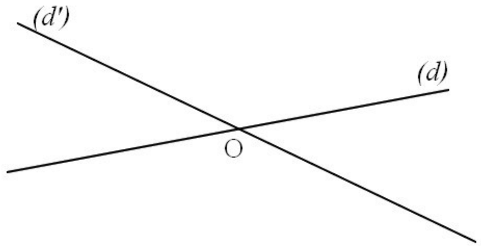
- <u>Droites sécantes en un point</u>

Les droites (d) et(d’) sont sécantes en un point si l’on a :

$$dét(\vec{u}\,;\vec{u}\,')\neq 0$$

On résout alors un système de 2 équations à 2 inconnues pour déterminer les coordonnées du point d’intersection :

- combinaisons linéaires
- substitution



Les droites du plan – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

On donne les points suivants : $A(0;2)$, $B(5;7)$, $C(-3;7)$, $D(9;3)$

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
2) Trouver les équations réduites des droites (AB) et (CD)
3) Calculer les coordonnées de leur point d'intersection

Exercice 2 corrigé disponible

Résoudre les systèmes suivants

1) $\begin{cases} 3x-7y=-9 \\ 5x+2y=26 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x-y=-17 \\ -x+5y=27 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{5}y=\frac{2}{3} \\ \frac{5}{2}x+3y=4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ -4x-6y=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y=33 \\ x^2-y^2=165 \end{cases}$

Exercice 3

Soit le système (S) suivant : $\begin{cases} 10x+35y=15 \\ 14x+49y=21 \end{cases}$

Calculer le déterminant δ du système (S). Que peut-on dire des deux droites qui constituent le système ? Le système admet-il des solutions ?

m_1 et m_2

$\mathbb{N} : \{0;1;2;3\dots\}$

$\begin{cases} m_1+m_2=154 \\ \frac{m_1}{m_2}=\frac{8}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} m_1+m_2=154 \\ 8m_2-3m_1=0 \end{cases}$

Exercice 4

1) Déterminer deux nombres entiers naturels connaissant leur somme, 154, et leur quotient, $\frac{8}{3}$.
2) Une chaloupe à moteur met 3 heures pour remonter une rivière sur une distance de 45 km et 1 heure et 48 minutes pour redescendre cette rivière sur la même distance.
   On appellera V_1 la vitesse de la chaloupe et V_2 la vitesse du courant de la rivière.
   a) Montrer que 1 h 48 = 1,8 h
   b) Déterminer la vitesse de la chaloupe ainsi que celle du courant en km/h.
3) Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ (exprimées en m) est tel que, si on diminue de 80 m sa longueur et si on augmente de 40 m sa largeur, il devient un carré.
   Si on diminue sa longueur de 60 m et si on augmente sa largeur de 20 m, son aire diminue de 400 m^2.
   Déterminer les dimensions de ce rectangle.

Exercice 5

Deux chauffeurs de taxis pratiquent les tarifs A et B :

- Tarif A : 5€ de « prise en charge » et 0,40€ par kilomètre parcouru.
- Tarif B : pas de frais de prise en charge, mais 0,60€ par kilomètre parcouru.

1. a. Un client veut parcourir 5km.
   Quel taxi doit-il prendre pour payer le moins cher ?
   b. Même question pour un client désirant parcourir 30km.
2. Exprimer A(x) le prix payé au taxi A et B(x) le prix payé au taxi B, en fonction du nombre x de kilomètres parcourus.

3. M. Durand et M. Dupond prennent successivement le même taxi, mais le trajet de M. Dupont est deux fois plus long que celui de M. Durand.
M. Dupont a-t-il payé le double ? (répondre pour chacun des deux taxis).

4. a. Représenter graphiquement les fonctions suivantes : $A(x), B(x) 0 \leq x \leq 40$
On note C_a et C_b leurs représentations respectives.
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_a et C_b. Interpréter à l'aide d'une phrase.

5. En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :
a. Pour quelles longueurs de trajets veut-il mieux prendre le taxi A ?
b. Un client a 12€ en poche. Quel taxi doit-il prendre pour aller le plus loin possible ? Quelle distance pourra-t-il parcourir ?

6. Un troisième taxi fait payer 11,50€ pour une course de 17km et 20,50€ pour 35km.
Le prix de la course dépend du nombre de kilomètres parcourus suivant une fonction affine.
a. Fait-il payer une prise en charge ? Si oui, de combien ?
b. Quel est le prix au kilomètre ?

Exercice 6

1) Résolvez le système (S_1) : $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ -x + 5y = -7 \end{cases}$

2) Déduisez-en la résolution du système suivants (S_2) : $\begin{cases} 3a^2 - \dfrac{4}{b+1} = 10 \\ -a^2 + \dfrac{5}{b+1} = -7 \end{cases}$

On pourra poser $a^2 = x$ et $\dfrac{1}{b+1} = y$

Exercice 7

Nous avons vu en collège que les médianes d'un triangle sont toujours concourantes. Démontrer le ci-dessous.

1) Soit un triangle ABC quelconque mais non aplati. On appelle A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB]. Justifier les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$).
2) Déterminer les équations des trois médianes de ABC.
3) Montrer qu'elles sont concourantes.

Exercice 8

1. Résoudre les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 4y = -7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1 \\ 3x - 5y = -3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} + \dfrac{y+1}{y+3} = 2 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 4x + 6y = -5 \\ \dfrac{2}{3}x + y + \dfrac{5}{6} = 0 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} -2x + 5y = -3 \\ \dfrac{3x+y}{5} - 1 = x - \dfrac{2}{5}(1+2y) \end{cases}$

2. Retrouver graphiquement les résultats des systèmes (1), (2) et (5) de la première question.

Exercice 9

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3x + y = 7 \\ \dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{y}{2} = -3 \end{cases}$

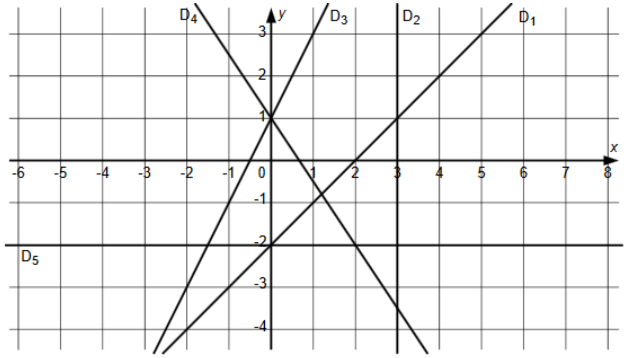
3. Un boulanger vend des pains au chocolat à 0,80€ et des croissants à 0,60€. Il avait 45 pains au chocolat de plus que de croissants. La recette a été de 211 euros.
Combien de pains au chocolat et de croissants a-t-il vendu ?

Exercice 10

Un groupe de pirates fête ses dix ans d'existence avec quelques vikings de la région. Chaque pirate mange pendant la soirée 4 poulets et boit 5 litres de bière. Les vikings ne mangent que 3 poulets, mais boivent 7 litres de bière. En totalité, 65 poulets et 117 litres de bières ont été consommés. Combien de pirates et de vikings étaient présents ?

Exercice 11

I) Lire graphiquement les équations des droites D_1 à D_5 et préciser à chaque fois si ces droites sont les représentations graphiques de fonctions affines ou non. *(Justification non demandée)*



II) Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(-3 ; 0)$; $B(-3 ; 4)$; $C(5 ; 0)$ et $D(1 ; -2)$.

1) Déterminer les coordonnées du milieu K de $[AD]$ et du milieu L de $[BC]$.
2) Démontrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
3) Déterminer les équations des droites (AB) et (CD) puis les coordonnées de T leur point d'intersection.
4) Démontrer que les points T, K et L sont alignés.

IV) Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(4 ; 13)$; $B(-2 ; 5)$ et $C(2 ; 7)$.

1) Déterminer l'équation de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(4;1)$ ainsi que celle de la droite (BC).
2) Sans faire aucun calcul, justifier que ces deux droites sont sécantes, puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
3) Déterminer tous les couples de nombres réels, tels que le premier augmenté de 12 est égal au double du second, et le second diminué de 12 est égal au quart du premier.
4) Déterminer l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient $(x-3y+30)^2-(y-18)^2=0$

Exercice 12

1) On donne les points $A(-4;-1)$ et $B(1;3)$. Déterminer l'équation cartési droite (AB).

2) Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne trois points : $A(-2;-2)$, $B(1;4)$, C(

   a) Déterminer les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segn et [BC].

   b) Déterminer l'équation réduite des droites (AC) et (IJ).

   c) Que peut-on dire des droites (AC) et (IJ) ? Pourquoi ? Quelle propriété de vient-on d'illustrer ?

Exercice 13

1) Soit le système suivant : $\begin{cases} 5x-3y=26 \\ 3x+4y=33 \end{cases}$

   a) Sans résoudre le système, montrer que ce système admet une solution.

   b) Résoudre ce système.

2) Résoudre les systèmes suivants par la méthode de votre choix

   a) $\begin{cases} x-4y=-2 \\ x+y=3 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 4x+7y=4 \\ 2x+5y=9 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y=-\frac{11}{5} \\ 5x+3y=4 \end{cases}$

3) Soit le système suivant : $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -3,2x+4,8y=-1,6 \end{cases}$

   a) Calculer le déterminant du système. Que peut-on dire des deux droites qui constituent le système ?

   b) Déterminer toutes les solutions du système.

Exercice 14

1) On donne les points $A(-2;-1)$, $B(-1;2)$, $C(4;1)$ et $D(2;-1)$

   a) Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB) puis un vecteur directeur de la droite (CD). Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ? Pourquoi ?

   b) Déterminer l'équation réduite de la droite d qui passe par C et qui est parallèle à (AB).

2) Dans un repère, on donne trois points : $A(2;4)$, $B(-2;0)$, $C(4;-2)$

   a) Déterminer les coordonnées du milieu I du côté [AB] et du milieu J du côté [AC].

   b) Déterminer l'équation réduite de la droite (CI), puis de la droite (BJ).

   c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droite (BJ) et (CI). Quel rôle joue ce point pour le triangle ABC ?