EXO12

$D\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

$E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont non colinéaires car (EBG) définit un plan.

Or :

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EB} = 1\times0 + 1\times1 + 1\times(-1) = 0$$

et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EG} = 1\times(-1) + 1\times1 + 1\times0 = 0$.

$\overrightarrow{DF}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG).
$\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal du plan (EBG).

2) $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (EBG) d'où l'équat° cartésienne de (EBG) :

$$ax + by + cz + d = 0.$$
$$x + y + z + d = 0.$$

D'où : $x+y+z-2=0$

Or $E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\in$ (EBG) d'où :

$$x_E + y_E + z_E + d = 0.$$

$$1 + 0 + 1 + d = 0.$$

$$d = -2.$$

Finalement : (BEG) : $x+y+z-2=0$.

3) Éq° paramétrique de (DF) :

$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$: (DF) : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

Éq° cartésienne :

$$x+y+z-2=0.$$
$$t+t+t-2=0.$$
$$\boxed{t=\frac{2}{3}}$$

On en déduit les coordonnées de I :

$$I\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Partie B.

1. M = D. Ainsi, le triangle MEB est équilatéral. En effet, [ME], [MB] et [EB] sont les diagonales de 3 carrés isométriques. Ainsi, ses angles valent $\frac{\pi}{3}$. D'où $\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}}$.

M = F, alors (ME) ⊥ (MB) d'où :

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

2 a. On sait que $\overrightarrow{DM} = x\,\overrightarrow{DF}$.

$D\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \end{cases}$$

D'où $M\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$.

2 b. $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB} = ME\times MB\times\cos(\theta)$.

$M\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix}1-x\\-x\\1-x\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-x\\1-x\\-x\end{pmatrix}$.

$B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$$ME = \sqrt{(1-x)^2+(-x^2)+(1-x)^2}$$
$$MB = \sqrt{(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2}.$$

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB} = (1-x)^2 + (1-x)\times(-x) + (1-x)(-x).$$
$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MB} = 1-2x+x^2-x+x^2-x+x^2.$$
$$= 3x^2-4x+1.$$
$$ME\times MB = ME^2 = \sqrt{(1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2}^{\,2}$$
$$= 1-2x+x^2+x^2+1-2x+x^2.$$
$$= 3x^2-4x+2.$$

D'où :

$$3x^2-4x+1 = (3x^2-4x+2)\times\cos(\theta).$$
$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}}$$

3. Soit f la f° définie sur [0;1] par :

$$f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$$

f est dérivable sur [0;1] comme quotient de deux fonctions polynomiales :

$$f'(x) = \frac{(6x-4)(3x^2-4x+2)-(6x-4)(3x^2-4x+1)}{(3x^2-4x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(6x-4)}{(3x^2-4x+2)^2}$$

$\forall x\in[0;1]$ $(3x^2-4x+2)^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $6x-4$:

$$6x-4\geq0$$
$$6x\geq4.$$
$$x\geq\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

D'où :

x	0		$\frac{2}{3}$		1.
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Var° de f	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0

$f(0) = \frac{1}{2}$.

$f(1) = 0$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\times\frac{2}{3}+1}{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\times\frac{2}{3}+2}.$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{3}{3}}{\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{6}{3}}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

4) a) MEB est rectangle en M ⟺ $\theta=\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \cos(\theta)=0.$

$\Leftrightarrow f(x)=0.$

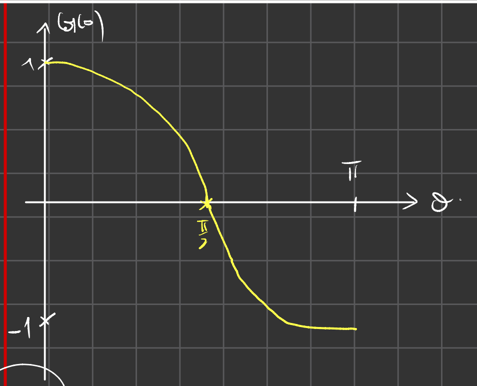
$$\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2} = 0.$$

$\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0.$

$\Delta = 4>0.$

$x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. $x_2 = \frac{4+2}{6} = 1.$

4) b) La f° $x\mapsto\cos(x)$ est strictement décroissante sur $[0;\pi]$.



On en déduit que θ est maximal lorsque cos θ est minimal, i.e f(x) est minimal.
Or le minimum de f vaut $-\frac{1}{2}$ et est atteint pour $x = \frac{2}{3}$.