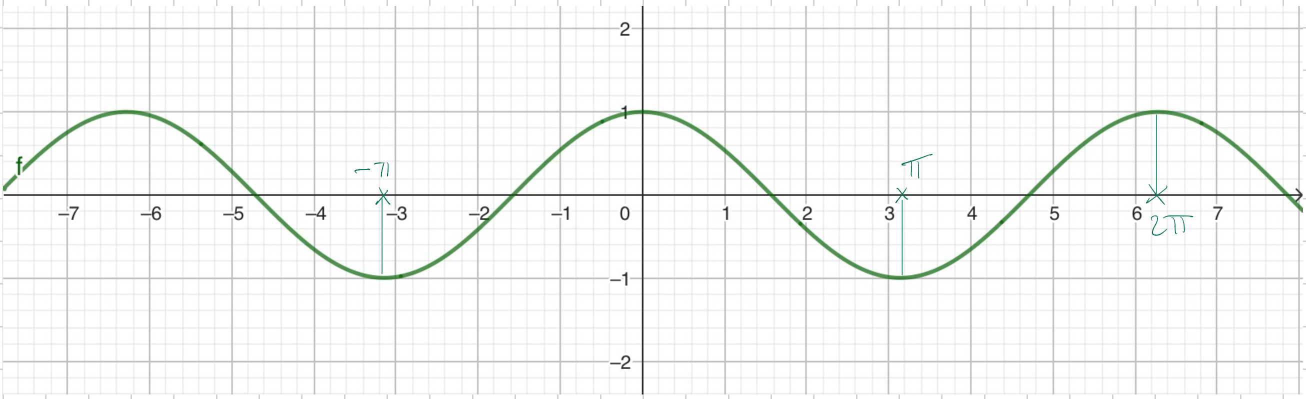
Trigonométrie

I. Fonctions trigonométriques.

a) Fonction cosinus.

. Fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \cos(x)$.

. Dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.



. Tableau de variations sur $[0 ; 2\pi]$:

x	0		π		2π
Signe de $\cos'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
Variations de cos	1	↘	-1	↗	1

. Parité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ donc cos est paire.
(symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

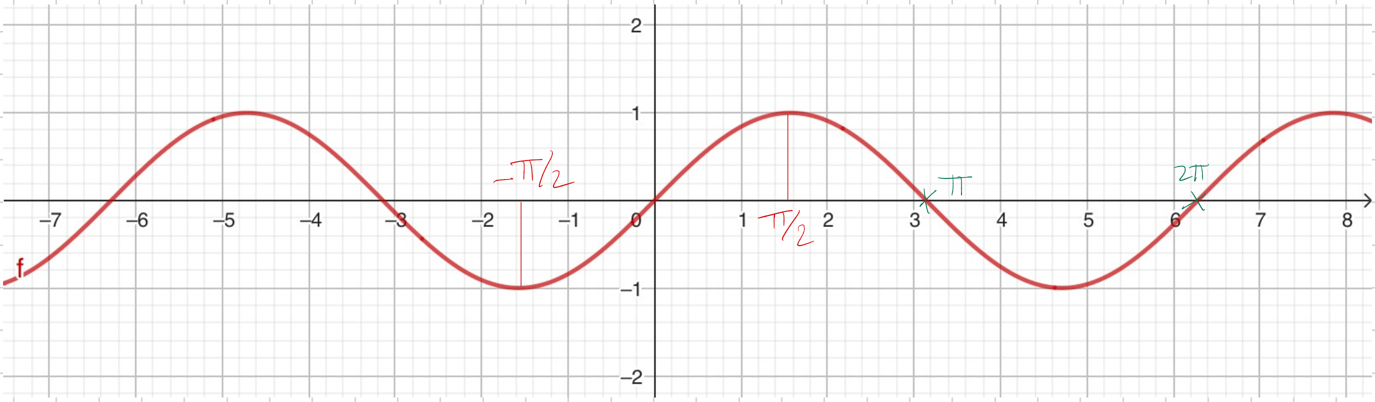
. Périodicité : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
↳ cos est périodique, sa période est $T = 2\pi$.
(fonction invariante pour toute translation de vecteur $2k\pi \vec{i}$ avec $\vec{i}$ vecteur unitaire sur (Ox)).

- **Formules d'addition :** $\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta). \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta). \end{cases}$$

b) Fonction sinus.

- **Fonction définie sur $\mathbb{R}$** par : $x \longmapsto \sin(x)$.
- **Dérivable sur $\mathbb{R}$** et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin'(x)=\cos(x)$.



- **Tableau de variations** sur $[0 ; 2\pi]$:

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
Signe de $\sin'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
Variations de $\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

- **Parité :** $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(-x)=-\sin(x)$ donc $\sin$ est <u>impaire</u>. (Symétrie par rapport à l'origine du repère).

- **Périodicité :** $\forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{N}$, $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$
  ↳ $\sin$ est périodique, sa période est $T=2\pi$.

. **Formules d'addition :** $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta).\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta).\end{cases}$$

Applications :

① Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$f(x)=2x+\sin(2x)$.

a) Conjecturer la parité de f (utiliser la calculatrice si besoin).

b) Démontrer la conjecture et interpréter le résultat graphiquement.

"pour tout"

c) Montrer que $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x)=2(1+\cos(2x))$.

d) Étudier les variations de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

e) En déduire les variations sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

$(f\circ g)'=\underbrace{f'(g(x))}\times g'(x)$.

sin 2x

(Oy)

$f(x)=f(-x)$

$-f(x)=f(-x)$

O

Corrigé : a) Graphiquement, on conjecture que f est impaire car on remarque elle est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

b) Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\times(-x) + \sin(2\times(-x)) \\ &= -2x + \sin(-2x). \\ &= -2x - \sin(2x). \\ &= -(2x + \sin(2x)) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

par imparité de la fonction sinus.

Donc f est bien <u>impaire</u>, la conjecture est validée.

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$) comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0;\frac{\pi}{2}]$).

et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + (\sin(2x))' \\ &= 2 + 2\cos(2x). \end{aligned}$$

$(f\circ g)' = f'(g(x)) \times g'$.

$\sin(x)$; $2x$; $\cos(2x) \times 2$

$f'(x) = 2(1+\cos(2x))$.

d'où le résultat.

d) $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Soit $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, on a :

$-1 \leq \cos(2x) \leq 1$

$0 \leq \cos(2x) + 1 \leq 2$

$$0 \leq \underbrace{2(\cos(2x)+1)}_{f'(x)} \leq 4$$

Donc : $f'(x) \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

x	0		$\pi/2$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	π

$$\begin{cases} f(0) = 2\times 0 + \sin(2\times 0) = 0 + \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0. \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\times\frac{\pi}{2} + \sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = \pi + \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = \pi \end{cases}$$

e) On en déduit :

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
Signe de $f'(x)$			$+$		
Variations de f	$-\pi$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	π

② On définit la fonction : $t(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

a) Trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}_t$ de la fonction t.

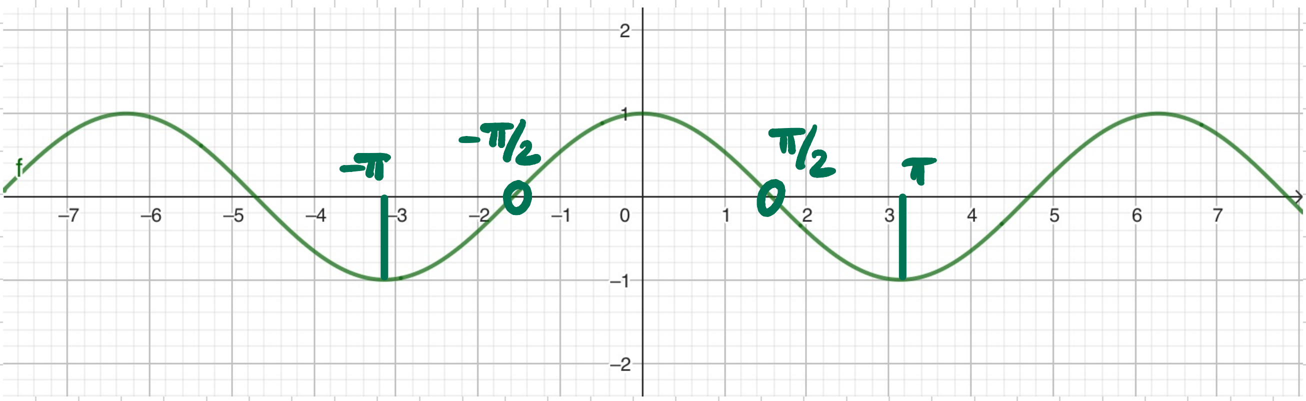
b) Conjecturer de la parité de t (utiliser la calculatrice si besoin). Conjecturer sa périodicité également.

c) Démontrer que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $t'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

d) En déduire les variations de t sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Corrigé :

a) $\cos(x) \stackrel{?}{=} 0$



cos : période $T = 2\pi$. (2π-périodique).

$\cos(x) = 0$: en $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

↳ cela se traduit tous les 2π par périodicité :

donc $\cos(x) = 0$ en $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$ et $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$.

(décalage vers la droite)

et en $x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$ et $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi$.

(décalage vers la gauche)

$$\cancel{\cos(x)=0 \text{ en } x=-\frac{\pi}{2}+2\pi+2\pi+\dots \text{ et } x=+\frac{\pi}{2}-2\pi-2\pi+\dots}$$

$$\cos(x)=0 \iff \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\iff x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\mathcal{D}_t=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

b) Graphiquement, la fonction t semble impaire (symétrique par rapport à l'origine) et de période $T=\pi$.

$$t(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-t(x).$$

par imparité de sinus et parité de cosinus.

t est bien impaire.

c) t est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$) comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$) et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$t'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)}.$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

$$= 1 + \underbrace{t^2(x)}_{\tan^2(x)}.$$

Autre dérivée : en sachant que : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\boxed{t'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

d) Signe de $t'(x)$?

Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\overbrace{\overbrace{\cos(x)}^{-} \times \overbrace{\cos(x)}^{-}}^{+}$$

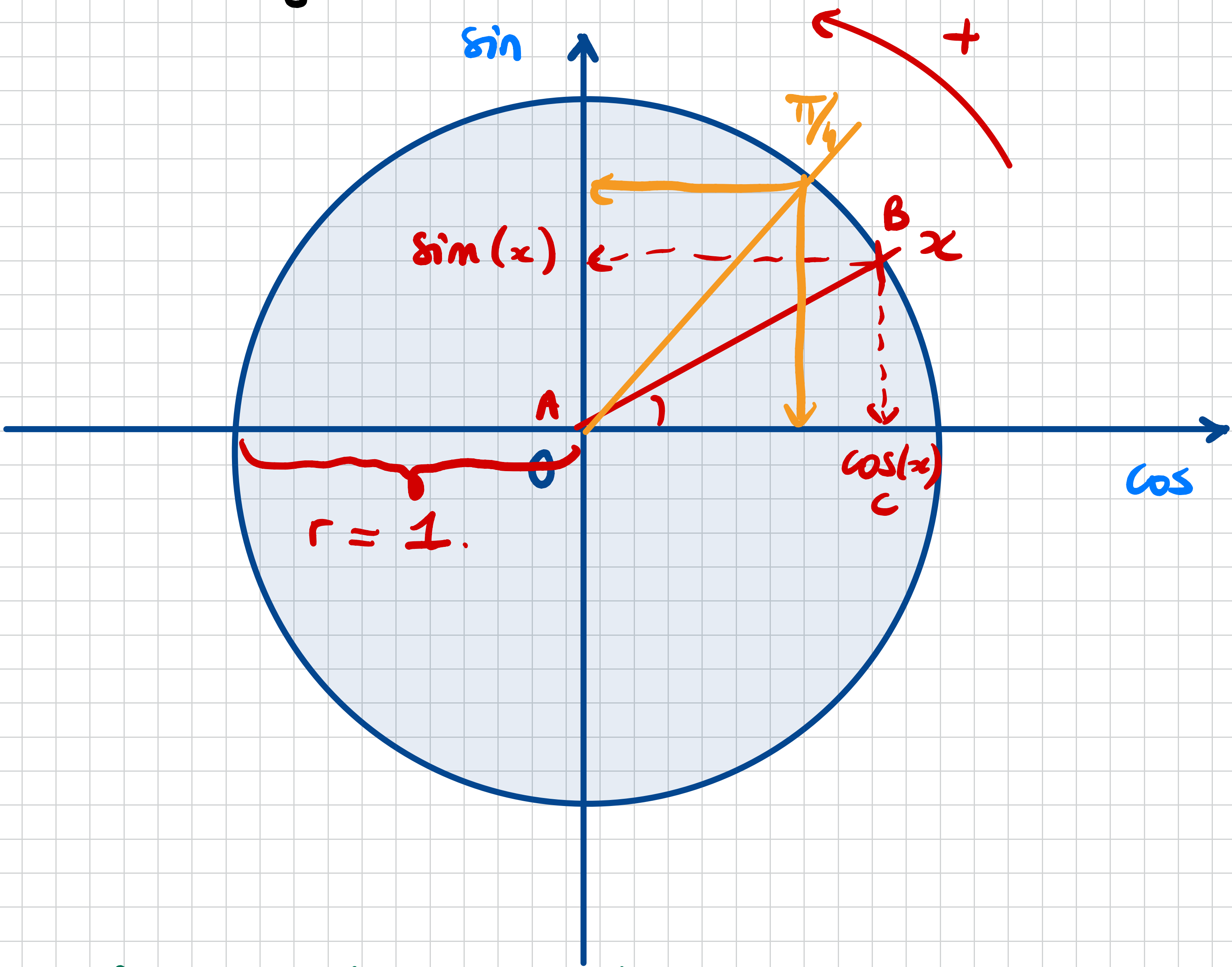
$t'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} > 0$ car $\cos^2(x) > 0$

(car un carré est toujours positif).

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
Signe de $t'(x)$	$\Vert$		$+$		$\Vert$
Variations de t					lim
			0	$\nearrow$	
	lim	$\nearrow$			

II. Cercle trigonométrique.

Le cercle trigonométrique est un cercle de centre O, de rayon 1. Il est orienté positivement dans le sens direct ou trigonométrique, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Rappel : π radian = 180 degrés.

Dans le triangle ABC rectangle en C.
On applique le théorème de Pythagore.

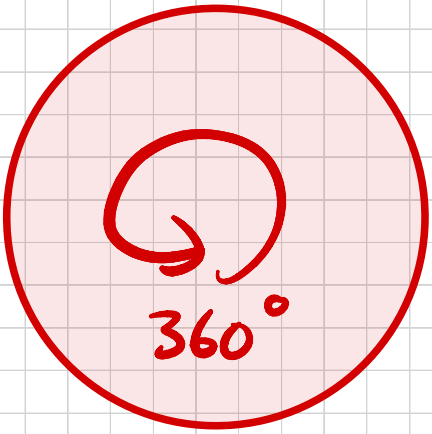
$$\underbrace{AB^2}_{r} = AC^2 + CB^2.$$

$$r^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

Donc : $r = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)}$

$= \sqrt{1}$

$\boxed{r = 1}$.



$= 2\pi$. radian.

$60° = \frac{\pi}{3}$ radian.

$180° = \pi$ radian.

$\downarrow (\div 2) \qquad \downarrow$

$90° = \frac{\pi}{2}$ radian.

$45° = \frac{\pi}{4}$ radian.

Méthode : Trouver la mesure principale d'un angle.

La mesure principale d'un angle est l'unique mesure de cet angle qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi[$.

ex : Trouver la mesure principale de $\frac{47\pi}{10}$.

Il y a : " $\frac{20\pi}{10}$ dans 2π "

Donc : on effectue la division euclidienne entre 47 et 20 :

$$\begin{array}{r|l} 47{,}0 & 20 \\ \hline 70 & 2{,}35 \\ 100 & \\ 0 & \end{array}$$

$2{,}35 \rightarrow$ correspond au "nombre de tours effectués" (tour de 2π).

↳ 2 tours + une portion de tour :

$20 \times 2 = 40$, il reste donc : $47 - 40 = 7$

soit $\boxed{\frac{7\pi}{10}} \in]-\pi ; \pi[$.

La mesure principale de $\frac{47\pi}{10}$ est $\frac{7\pi}{10}$.

→ trouver la mesure principale de $\frac{103\pi}{4}$ et $\frac{208\pi}{6}$