

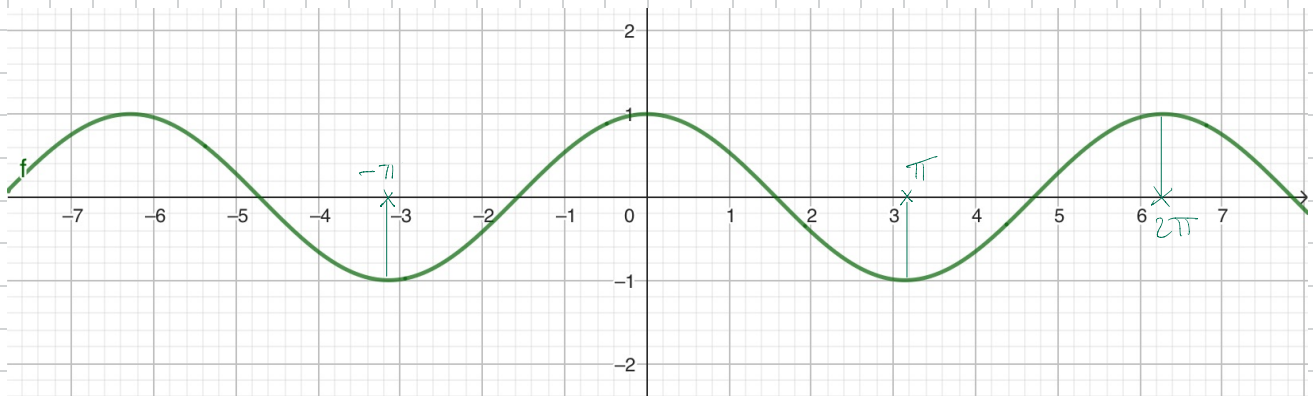
# Trigonométrie

## I. Fonctions trigonométriques.

### a) Fonction cosinus.

. Fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $x \mapsto \cos(x)$ .

. Dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$ .



. Tableau de variations sur  $[0; 2\pi]$  :

$x$	0	$\pi$	$2\pi$
Signe de $\cos'(x)$	○	○	○
Variations de $\cos$	1	-1	1

. Parité :  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$  donc  $\cos$  est paire.  
(Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

. Périodicité :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$   
↳  $\cos$  est périodique, sa période est  $T = 2\pi$ .  
(fonction invariante pour toute translation de vecteur  $2k\pi \vec{i}$  avec  $\vec{i}$  vecteur unitaire sur  $(Ox)$ ).

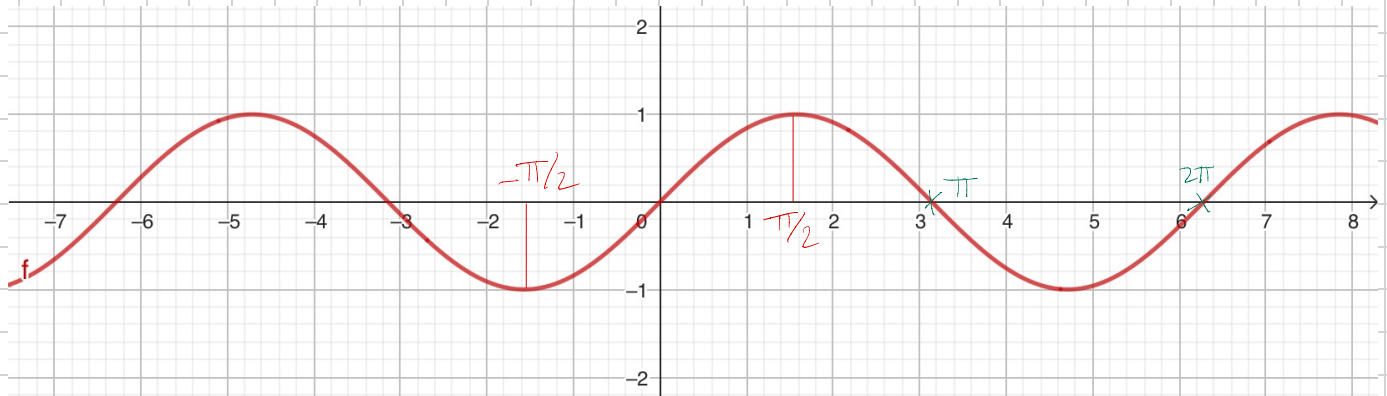
• **Formules d'addition:**  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta). \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta). \end{cases}$$

## b) Fonction sinus.

• **Fonction définie sur  $\mathbb{R}$**  par:  $x \mapsto \sin(x)$ .

• **Dérivable sur  $\mathbb{R}$**  et:  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$ .



• **Tableau de variations sur  $[0; 2\pi]$ :**

$x$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
Signe de $\sin'(x)$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+
Variations de $\sin$	0	↗ 1	↘ 0	↘ -1	↗ 0

• **Parité:**  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$  donc  $\sin$  est impaire.  
(Symétrie par rapport à l'origine du repère).

• **Périodicité:**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$   
↳  $\sin$  est périodique, sa période est  $T = 2\pi$ .

Formules d'addition:  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta). \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta). \end{cases}$$

Applications:

① Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  par:

$$f(x) = 2x + \sin(2x).$$

- Conjecturer la parité de  $f$  (utiliser la calculatrice si besoin).
- Démontrer la conjecture et interpréter le résultat graphiquement.
- Montrer que  $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ,  $f'(x) = 2(1 + \cos(2x))$ .
- Étudier les variations de  $f$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .
- En déduire les variations sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

$$(f \circ g)' = f'(g(x)) \times g'(x).$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 $\sin$   $2x$

$$f(x) = f(-x) \quad \text{--- } (O_y)$$
$$- f(x) = f(-x)$$

$\downarrow$   
0

Comigé: a) Graphiquement, on conjecture que  $f$  est impaire car on remarque elle est symétrique par rapport à l'origine  $O$  du repère.

b) Soit  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2x(-x) + \sin(2x(-x)) \\ &= -2x + \sin(-2x). \\ &= -2x - \sin(2x). \quad \leftarrow \text{par imparité de la fonction sinus.} \\ &= -(2x + \sin(2x)) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Donc  $f$  est bien impaire, la conjecture est validée.

c)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (donc sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ) comme somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  (donc sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ).

et:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + (\sin(2x))' \\ &= 2 + 2\cos(2x). \end{aligned}$$

$$(f \circ g)' = f'(g(x)) \times g'.$$

$\sin(x) \quad 2x \quad \cos(2x) \times 2$

$$f'(x) = 2(1 + \cos(2x)).$$

d'où le résultat.

d)  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Soit  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ , on a:

$$-1 \leq \cos(2x) \leq 1$$

$$0 \leq \cos(2x) + 1 \leq 2$$



$$0 \leq \underbrace{2(\cos(2x)+1)}_{f'(x)} \leq 4$$

Donc :  $f'(x) \geq 0$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f$		

$$f(0) = 2 \times 0 + \sin(2 \times 0) = 0 + \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \frac{\pi}{2} + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \pi + \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = \pi$$

e) On en déduit :

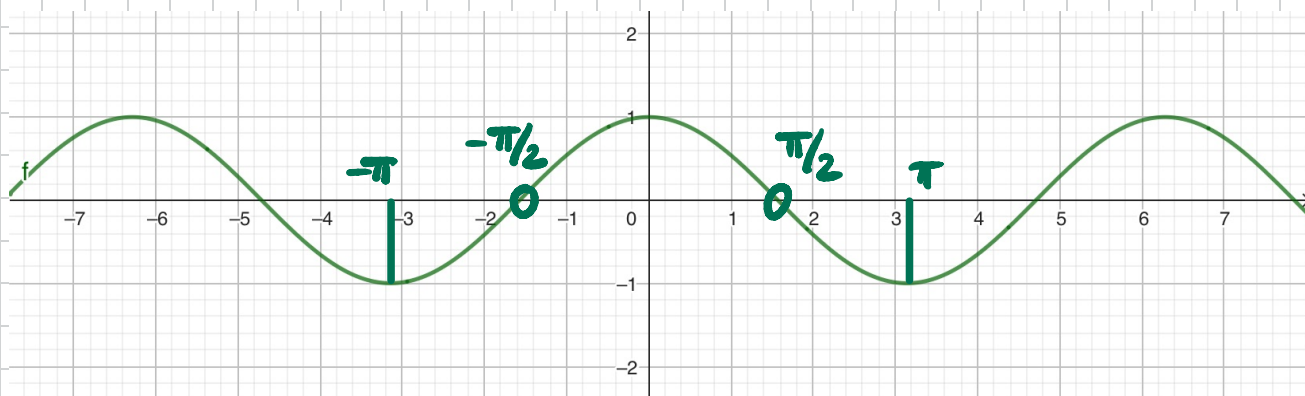
$x$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $f'(x)$			
Variations de $f$			

② On définit la fonction :  $t(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

- Trouver l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $t$ .
- Conjecturer de la parité de  $t$  (utiliser la calculatrice si besoin). Conjecturer sa périodicité également.
- Démontrer que :  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ,  $t'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ .
- En déduire les variations de  $t$  sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ .

Corrigé :

a)  $\cos(x) \stackrel{?}{=} 0$



cos : période  $T = 2\pi$ . ( $2\pi$ -périodique).

$\cos(x) = 0$  : en  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{\pi}{2}$ .

↳ cela se traduit tous les  $2\pi$  par périodicité :

donc  $\cos(x) = 0$  en  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$  et  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ .

(décalage  
vers la droite) ←

et en  $x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$  et  $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi$ .

(décalage  
vers la gauche) ←

~~$$\cos(x) = 0 \text{ en } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi + 2\pi + \dots$$
$$\text{et } x = \frac{\pi}{2} - 2\pi - 2\pi + \dots$$~~

$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathcal{D}_t = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Graphiquement, la fonction  $t$  semble impaire (symétrique par rapport à l'origine) et de période  $T = \pi$ .

$$t(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -t(x).$$

$t$  est bien impaire.

→ par imparité de sinus et parité de cosinus.

c)  $t$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (donc sur  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ )

comme quotient de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  (donc sur  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$ ) et :

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{aligned}
 t'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
 &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
 &= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
 &= 1 + \underbrace{t^2(x)}_{\tan^2(x)}.
 \end{aligned}$$

Autre dérivée: en sachant que :  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$t'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

d) Signe de  $t'(x)$  ?

Soit  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ :

$$t'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0 \text{ car } \cos^2(x) > 0$$

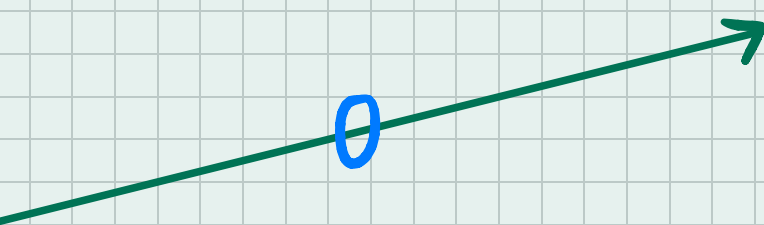
(car un carré est toujours positif).

$$\begin{array}{c}
 + \\
 \overbrace{\quad} \\
 \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\
 \cos(x) \times \cos(x)
 \end{array}$$

$x$	$-\pi/2$	$0$	$\pi/2$
Signe de $t'(x)$		+	
Variations de $t$		0	

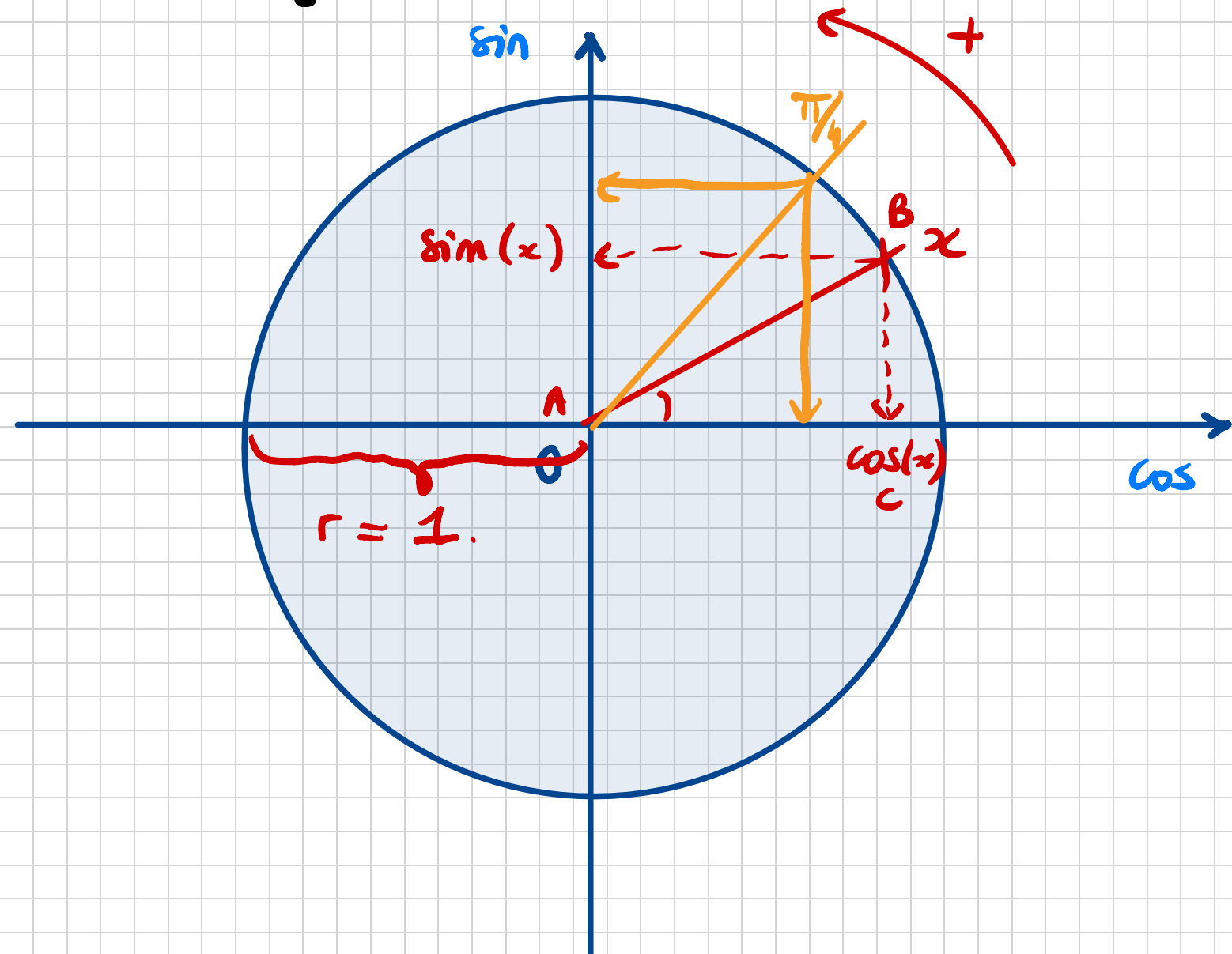
lim

lim



## II. Cercle trigonométrique.

Le cercle trigonométrique est un cercle de centre  $O$ , de rayon  $1$ . Il est orienté positivement dans le sens direct ou trigonométrique, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Rappel:  $\pi$  radian = 180 degrés.

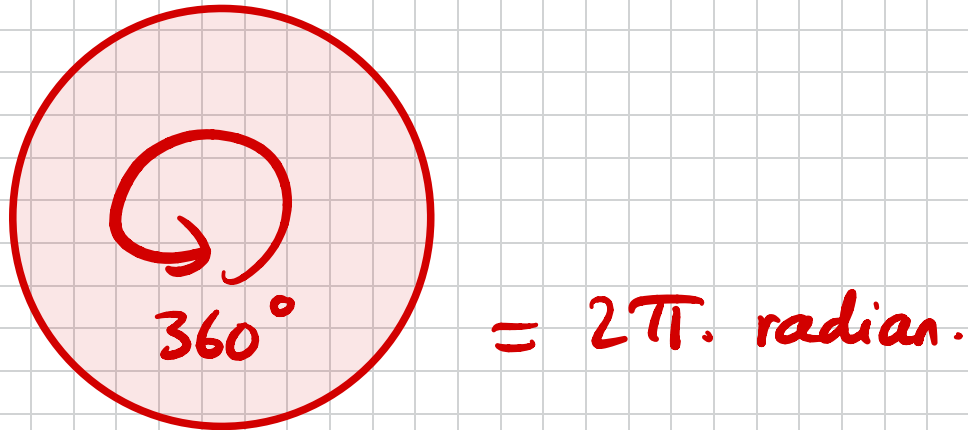
Dans le triangle ABC rectangle en C.  
On applique le théorème de Pythagore.

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

$$r^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

$$\text{Donc : } r = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)}$$
$$= \sqrt{1}$$

$$r = 1$$



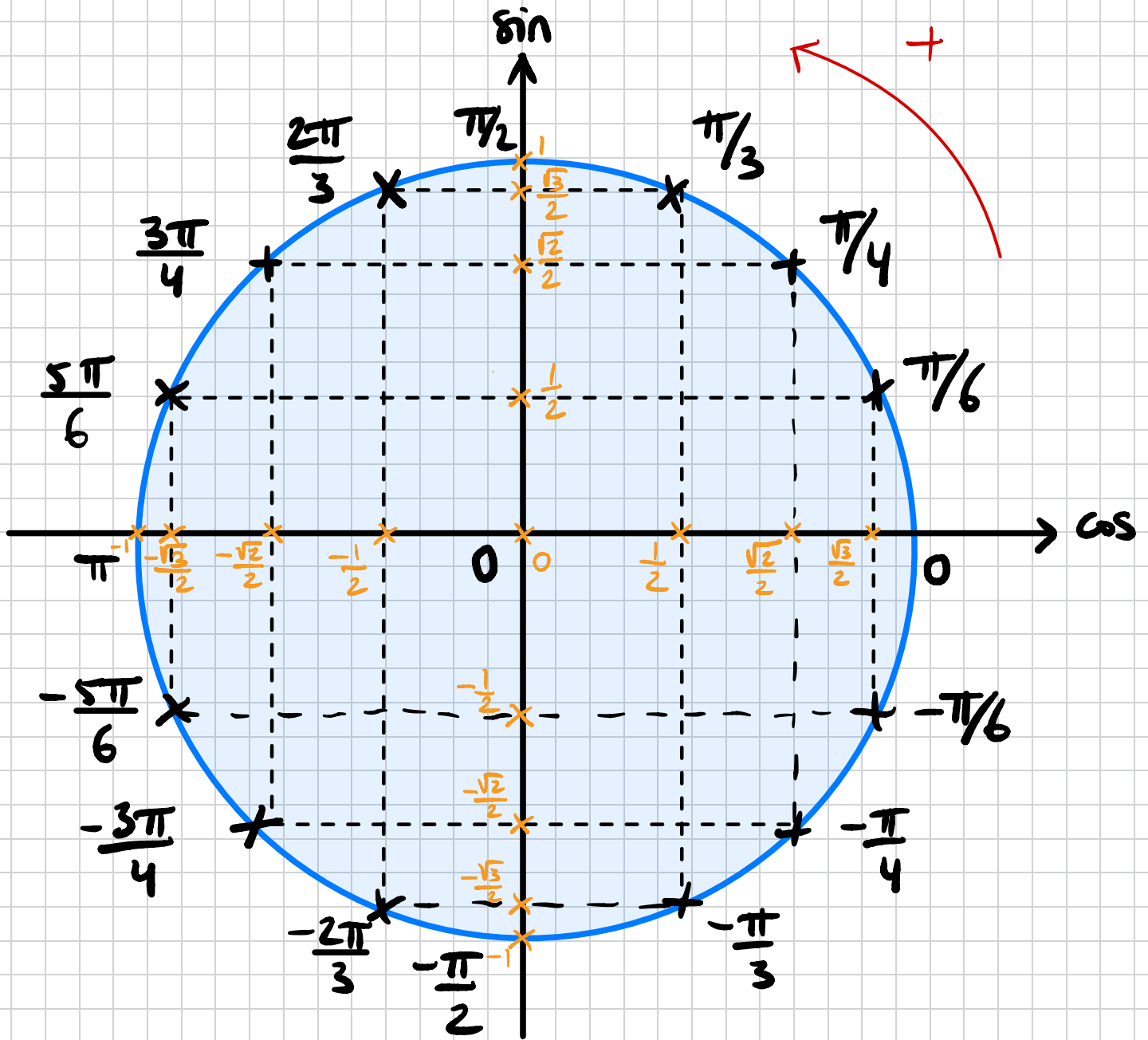
$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ radian.}$$

$$180^\circ = \pi \text{ radian.}$$

$$30^\circ \stackrel{\downarrow (\div 2)}{=} \frac{\pi}{2} \text{ radian.}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ radian.}$$

# Cercle trigonométrique :





Méthode: Trouver la mesure principale d'un angle.

La mesure principale d'un angle est l'unique mesure de cet angle qui appartient à l'intervalle  $] -\pi; \pi[$ .

ex: Trouver la mesure principale de  $\frac{47\pi}{10}$ .

Il y a: " $\frac{20\pi}{10}$  dans  $2\pi$ "

$$\frac{\pi}{10}$$

Donc: on effectue la division euclidienne entre 47 et 20:

$$\begin{array}{r} 47,0 \\ \overline{) 70} \\ \underline{100} \\ 0 \end{array}$$

20

2,35

→ correspond au "nombre de tours effectués" (tour de  $2\pi$ ).

↳ 2 tours + une portion de tour:

$$20 \times 2 = 40, \text{ il reste donc: } 47 - 40 = 7$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{7\pi}{10}} \in ] -\pi; \pi[.$$

La mesure principale de  $\frac{47\pi}{10}$  est  $\frac{7\pi}{10}$ .

→ trouver la mesure principale de  $\frac{103\pi}{4}$  et  $\frac{208\pi}{6}$

Calculer le cos et sin.

$$\frac{103\pi}{4}$$

Il y a : "  $8 \frac{\pi}{4}$  dans  $2\pi$  ".

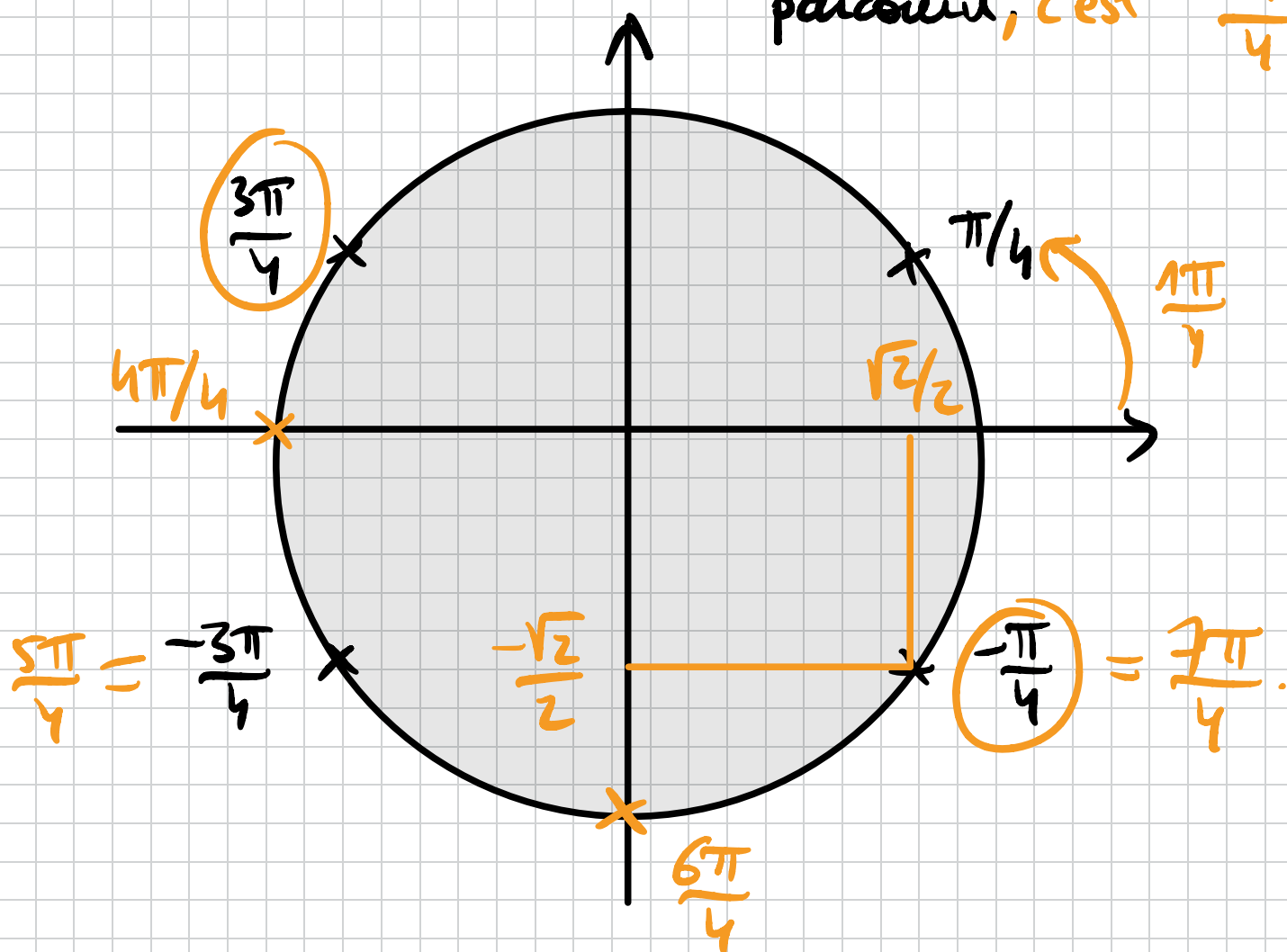
Pour trouver le nb de tours effectués, on fait:

$$\begin{array}{r} 103,0 \quad | \quad 8 \\ \underline{23} \quad | \quad 12,8 \\ \underline{70} \quad | \\ 6 \end{array}$$

Donc on a effectué 12 tours entiers + une "portion de tours".

soit:  $12 \times 8 = 96 \frac{\pi}{4}$  (dans 12 tours il y a  $\frac{96\pi}{4}$ ).

$\frac{103\pi}{4} - 96 \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ . Il nous reste  $\frac{7\pi}{4}$  à parcourir, c'est  $-\frac{\pi}{4}$ .



$$\text{Donc : } \begin{cases} \cos\left(\frac{103\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{103\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{103\pi}{4} = \underbrace{\frac{96\pi}{4}}_{\text{"tours inutiles"}} + \frac{7\pi}{4}$$

$$* \frac{208\pi}{6}$$

Il y a " $12\frac{\pi}{6}$  dans  $2\pi$ ".

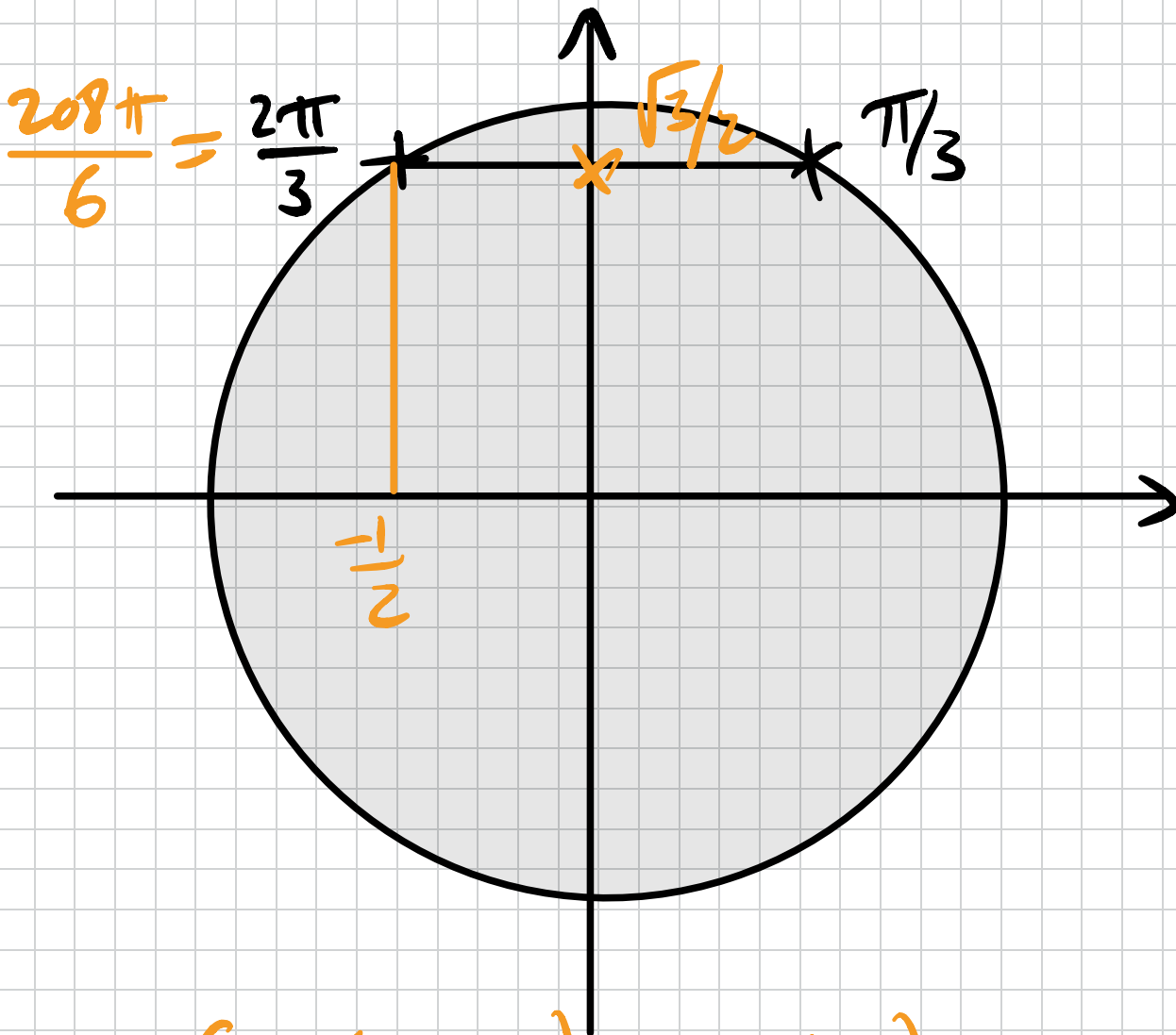
$$\begin{array}{r|l} 2080 & 12 \\ \hline 88 & 17,3 \\ \hline 40 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

On a effectué 17 tours  
+ une "portion de tour".

$$208 - 17 \times 12 = 208 - 204 = 4$$

Donc il me reste  $\frac{4\pi}{6}$  à effectuer.

$$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$



Done :

$$\cos\left(\frac{208\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\left(\frac{208\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calculer:  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow \text{mentem \& raciste.}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

honniete et pas raciste.

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$