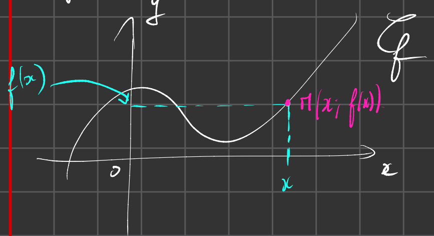
Dimanche 10 mars 2024 - Seconde GT - Maths

$D_f \to \mathbb{R}$; $x \xrightarrow{f} y = f(x)$; D_f : ensemble de définition ; x : antécédent ; y : image (unique)

Ex : $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^*$

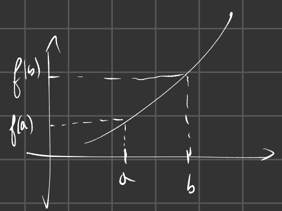
$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$

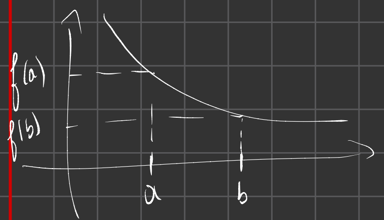


$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$A(3,1) \in \mathcal{C}_f$?

$f(3) = 2\times3^2 + 3\times3 + 1 = 18 + 9 + 1$
$= 28 = 1$?





Méthode :
1°) $a \leq b$ dans D_f.
2°) $f(b) - f(a)$
3°) Signe de $f(b) - f(a)$.
4°) Si $f(b) - f(a) > 0$, $f \nearrow$.
Sinon, $f \searrow$.

Ex : Soit $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$.
1) Soit $a \in [0;+\infty[$ et $b \in [0;+\infty[$.
$a \leq b$.
2°) $f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$

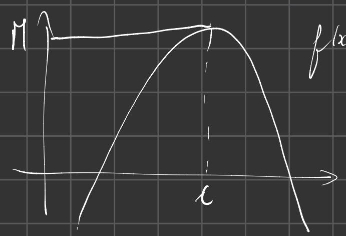
$$= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times (\sqrt{b} + \sqrt{a})}{1 \times (\sqrt{b} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{\sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$$

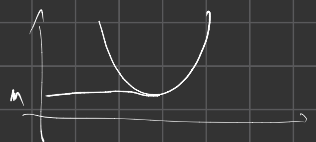
$\frac{A \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$

$(b+a)(b-a) = b^2 - a^2$

f est une fonction croissante.



$f(x) \leq M$.

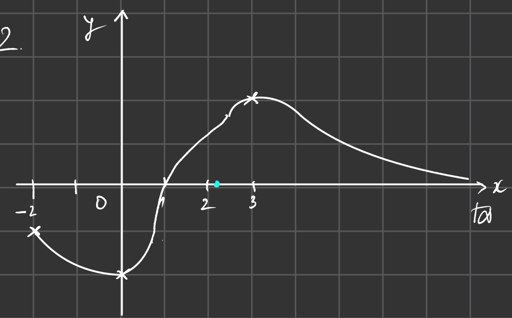


$f(x) \geq m$.

Exercice n°3 :

1. $D_f = [-2; +\infty[$

2.



3. Voici le signe de $f(x)$ sur D_f :

x	-2		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 4 :

1) $f(-2) = 3$ et $g(2) = 2$

2) Les antécédents de (-1) sont 3 et 5 par f
$(f(3) = (-1) \quad f(5) = -1)$

3) $f(x) = g(x)$: trouver les abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
$S = \{-2 ; 2 ; 5\}$

4) $f(x) < 2$. $S =]2; 6[$

5) $f(x) \geq g(x)$.
$S = [-2; 2] \cup [5; 6]$

Exercice 5

1) Le max de f est 5
Le min de f est -5

2) a. On ne peut pas conclure

b. On ne peut pas conclure

c. On ne peut pas conclure

d) Vrai

3) $f(-3) > f(-2)$
Car la fonction f est décroissante sur $[-4;-1]$

4) On ne peut pas comparer $f(0)$ et $f(3)$, car la fonction f n'est pas monotone (fonction qui est soit croissante, soit décroissante)

5) $f(x) = 6$. $S = \emptyset$

5) b. $S = [-4 ; 8] \setminus \{5\}$

5) c). $S = D_f$

Exercice 10 :

f est paire ssi :

* D_f est centré en 0.
* $f(-x) = f(x)$.

f est impaire ssi :

* D_f est centré en 0.
* $f(-x) = -f(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ est bien centré en 0.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x^2+2} = \frac{x^2+1}{x^2+2} = f(x).$$

Donc f est paire, C_f est symétrique par rapport à (Oy).

b) $D_f = \mathbb{R}$, D_f est centré en 0.

$$f(-x) = \frac{4\times(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{4x}{x^2+1}$$

$$= -f(x).$$

f est impaire.

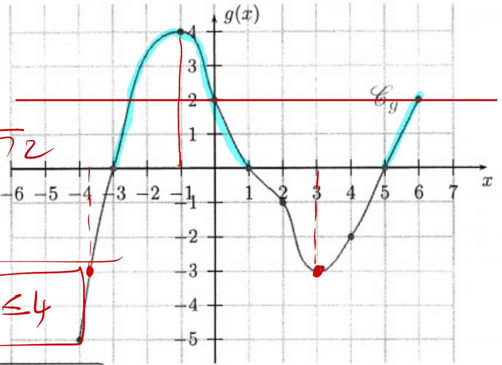
Généralités des fonctions – Exercices - Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

On considère la fonction g dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ ci-dessous.

x	-4	-1	3	6
Var° de f	-5 ↗	4 ↘	-3 ↗	2

Sur $[-4;3]$ $\boxed{-5 \leq f(x) \leq 4}$



A compléter sur cette feuille (3,5 points)

1. L'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g est $\mathscr{D}_g =$ $[-4;6]$.
2. L'image par la fonction g de -4 est $g(-4) =$ -5, et celle de 4 est $g(4) =$ -2
3. Les antécédents par g de -3 sont : 3 et $-3,8$
4. L'ensemble E des réels qui ont une image positive par la fonction g est : $[-3;1] \cup [5;6]$
5. Le maximum de g sur son ensemble de définition est 4, il est atteint en -1.
   Le minimum de la fonction g sur son ensemble de définition est -5, il est atteint en -4.
6. L'ensemble F des réels qui ont exactement 3 antécédents par la fonction g est $]-3;2]$

7. **Tableau de variation (1,5 point).**

7. a. Dresser sur votre copie double le tableau de variation de la fonction g.

7. b. Donner sur votre copie double un encadrement de $g(x)$ sur l'intervalle $[-4\ ;\ 3]$.

Exercice 2 corrigé disponible

Dans cet exercice, $f(x)$ est définie par une expression algébrique. Dans chaque cas, préciser l'ensemble de définition de f.

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + 3x$ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ $[0;+\infty[$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)(x+1)}$ $\mathbb{R}\setminus\{4;-1\}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\mathbb{R}$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ → $[0;+\infty[$

$-1\ ;\ 1$

$D_f = [0;+\infty[\setminus \{1\}$

Exercice 3 corrigé disponible

Tracer une courbe

On donne : $f(1) = 0$ et $f(5) = 1$ et pour tout $x > 3$, on a $f(x) > 0$

x	-2	0	3	$+\infty$
$f(x)$	-1 ↘	-2 ↗	2 ↘	0

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ? (0,5 pt)
2) Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation et des renseignements données. (1 pt)
3) Quel est le signe de la fonction f sur son ensemble de définition ? (0,5 pt)

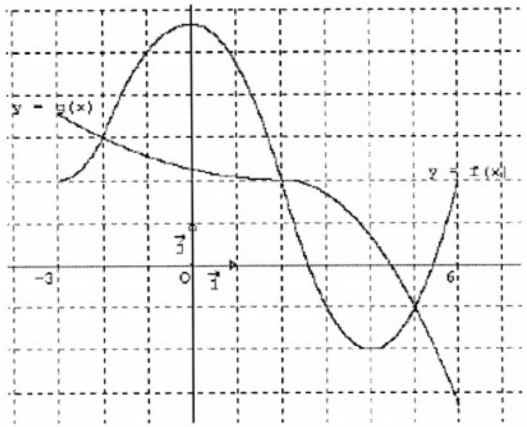
Exercice 4 corrigé disponible

Les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[-3\ ;6]$, on représente ci contre leur représentation graphique.

Dans cet exercice des traces sur le graphique ci-contre peuvent suffire comme justification aux questions.

A l'aide d'une lecture graphique

a) Déterminer $f(-2)$; $g(2)$
b) Les antécédents de -1 par la fonction f .
c) Les solutions éventuelles de l'équation $f(x)=g(x)$
d) Les solutions de l'inéquation $f(x)<2$
e) les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$



Exercice 5 **corrigé disponible**

On considère le tableau de variation d'une fonction f :

x	-4		-1		2		5		8
$f(x)$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	5

Répondre aux questions suivantes, en justifiant votre réponse.

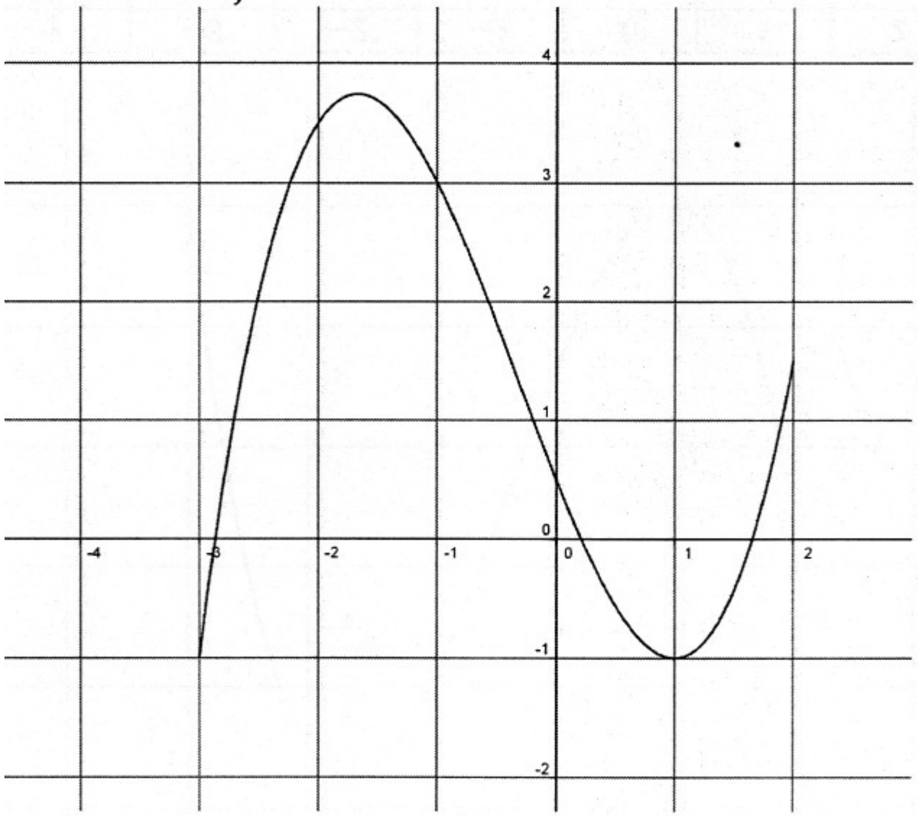
1. Préciser les extremums de f.
2. Pour chacune des affirmations de cette question, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas conclure :
   a) $A(4\,;2)$ est un point de la courbe de f.
   b) $f(0) = 0$
   c) $f(4) \leq 0$
   d) La courbe de f et l'axe des abscisses ont 4 points communs
3. Comparer $f(-3)$ et $f(-2)$.
4. Peut-on comparer $f(0)$ et $f(3)$?
5. Résoudre les équations et inéquations suivantes :
   a) $f(x) = 6$
   b) $f(x) > -5$
   c) $f(x) < 8$.

Exercice 6 **corrigé disponible**

On appelle f la fonction définie par la courbe ci-contre.

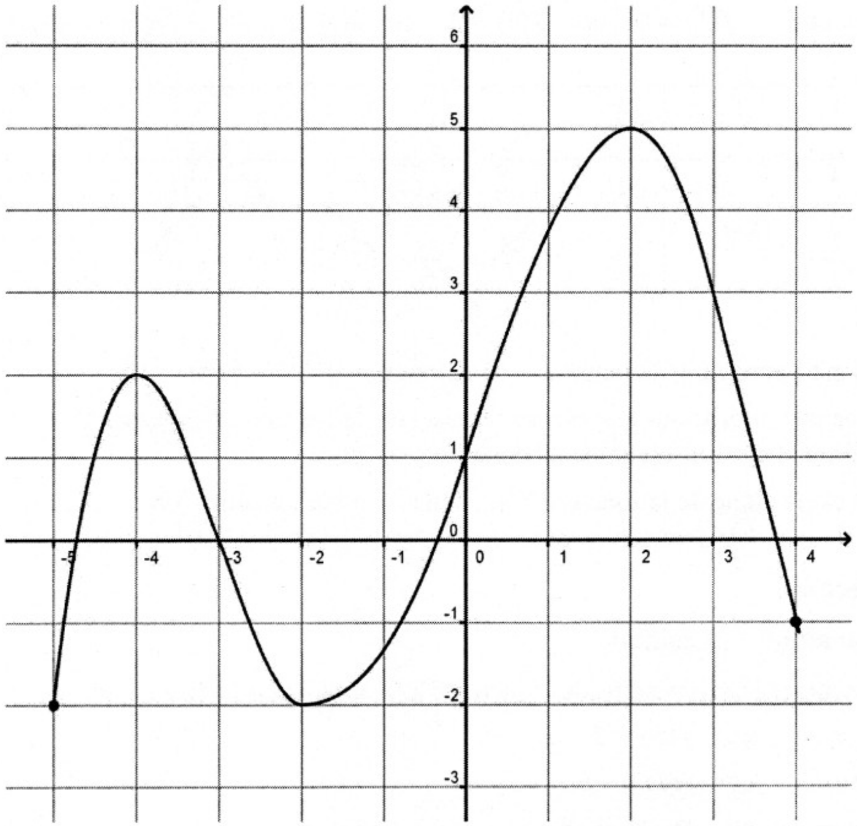
A l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes en expliquant votre méthode.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quel est le minimum de f ?
3. Quelle est l'image de -1 ?
4. Trouver un nombre ayant 3 antécédents et un nombre n'ayant pas d'antécédent.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3$.
6. Résoudre l'inéquation $f(x) > 1$
7. Discuter suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$
8. Donner le tableau de variations de f.
9. On sait maintenant que f est donnée par la formule $f(x) = \frac{x^3+x^2-5x+1}{2}$. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs de f ci-dessous.



x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$						

Exercice 7 corrigé disponible



1) Déterminer graphiquement les images suivantes : (1 pt)
$f(-5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f. (1 pt)

3) Résoudre graphiquement, avec la précision permise par la représentation, les équations suivantes (on expliquera la démarche suivie pour la première équation) (2 pts)

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = 0$

c) $f(x) = 2$

d) $f(x) = -3$

4) Résoudre graphiquement, avec la précision permise par la représentation, les inéquations suivantes (on expliquera la démarche suivie pour la première inéquation) (2 pts)

a) $f(x) \geqslant 0$

b) $f(x) < 3$

c) $f(x) \geqslant 2$

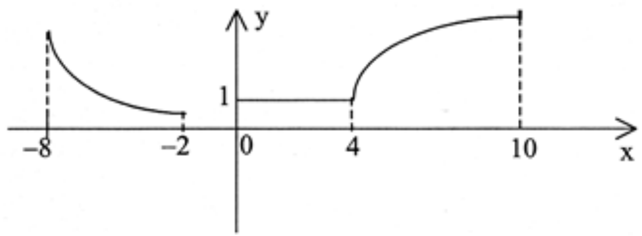
5) a) Quel est le minimum de f sur $[-5; 4]$ (0,5 pt)

b) Quel est le maximum de f sur $[-5; 0]$ (0,5 pt)

Exercice 8 corrigé disponible

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire l'ensemble de définition sous forme de réunion d'intervalles.

1. f est définie par sa courbe représentative C_f dans un repère.



2. g est définie par : $g(x) = 4\sqrt{15x-5} + 7$

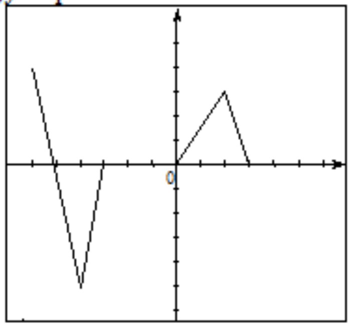
3. h est définie par : $h(x) = \dfrac{3x+5}{4x+16}$

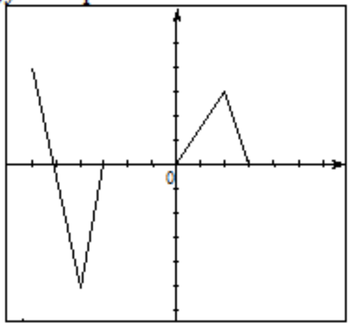
4. k est définie par : $k(x) = \dfrac{\sqrt{5x+1}}{x-1}$

Exercice 9 corrigé disponible

1. Une fonction f est définie sur $[-6 ; 6]$. Une partie de sa représentation graphique est donnée. Compléter la représentation graphique dans les cas suivants :

a) f est paire. b) f est impaire.





2. Une fonction f est définie sur $[-6 ; 6]$. Une partie de son tableau de variation est donnée ci-dessous.

x	0	2	4	6
Variations de f	0 ↗	3 ↘	-5 ↗	5

Recopier et compléter le tableau dans les cas suivants :

a) f est paire. b) f est impaire.

Exercice 10 corrigé disponible

Déterminer si les fonctions f suivantes définies sur l'ensemble D_f sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre.

a. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ sur $D_f = \mathbb{R}$

b. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ sur $D_f = \mathbb{R}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$ sur $D_f = [-4 ; 4]$

d. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $D_f = \mathbb{R}$

e. $f(x) = \sqrt{x^2+x+4}$ sur $D_f = \mathbb{R}$

f. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ sur $D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

Exercice 11 corrigé disponible

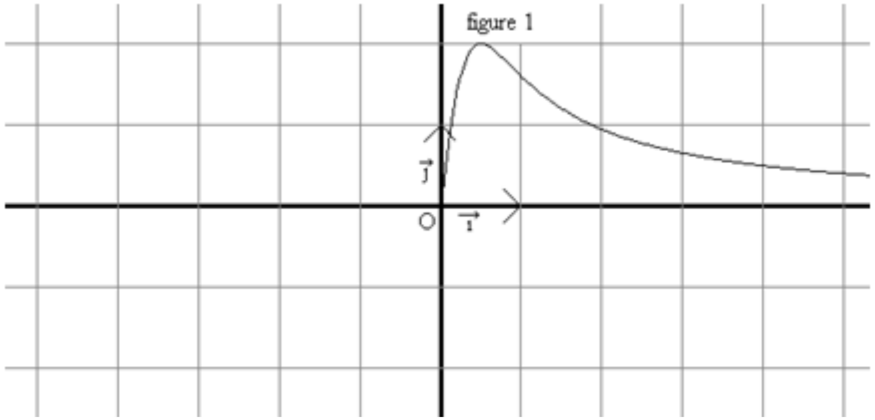
1. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :
   - f est définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$;
   - f est croissante sur cet intervalle ;
   - $f(0) = 1$ et $f(5) = 4$.
2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :
   - f est définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$;
   - f est décroissante sur $[-3 ; -1]$;
   - f est croissante sur $[-1 ; 3]$;
   - pour tout $x \in [-3 ; 3]$, $-1 \leq f(x) \leq 4$.
3. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f sachant que :
   - f est définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$;
   - f admet un minimum en -1 et un maximum en 2 ;
   - les images de -3 et de 4 sont respectivement 2 et 1 ;
   - 0 a deux antécédents : -2 et 1.

Exercice 12 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{8x}{4x^2+1}$$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$



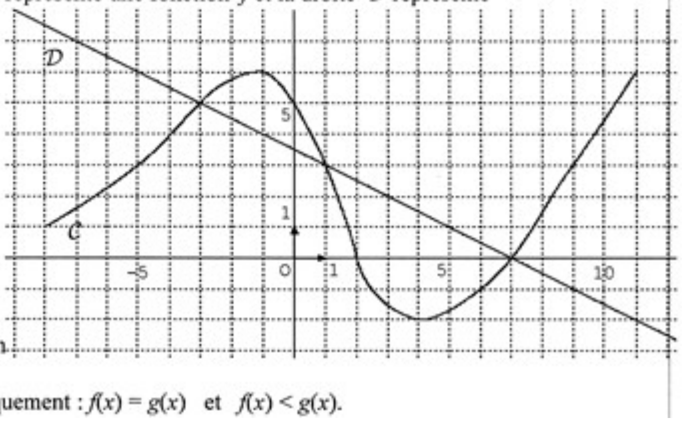
1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Etudier la parité de f. Que peut-on déduire comme propriété concernant la courbe représentative de f ?

2. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty]$; en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$

3. Construire la courbe représentative de f sur $]-\infty;0]$

Exercice 13 **corrigé disponible**

La courbe $\mathcal{C}$ ci-après représente une fonction f et la droite $\mathcal{D}$ représente une fonction g.



1. Déterminer les images par f de -5 ; 2 et 11.
2. Déterminer les antécédents par f de 3 et de -2.
3. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ et $f(x) = 6$.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 3$.
5. Résoudre graphiquement : $f(x) = g(x)$ et $f(x) < g(x)$.

Exercice 14 **corrigé disponible**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 1$.

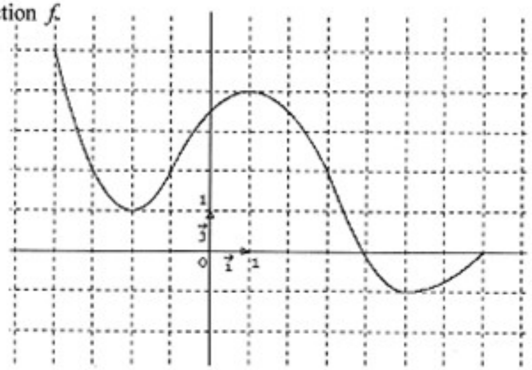
1. Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs : (on donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près)

x	-10	-5	-3	0	1	$\frac{3}{2}$	2,5	4	7	12
$f(x)$										

2. Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique : 1 cm), tracer la courbe représentative de la fonction f.

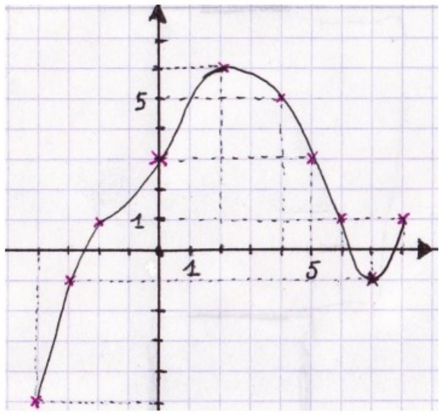
Exercice 15 **corrigé disponible**

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f.



1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer graphiquement l'image de 5 par la fonction f. Donner $f(-4)$.
3. Déterminer s'ils existent, les antécédents de 2 par la fonction f.
   Déterminer s'ils existent, les antécédents de -2 par la fonction f.
4. Sans donner de justification :
   Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3{,}5$, puis résoudre l'inéquation $f(x) > 3{,}5$
5. Etablir le tableau des variations de la fonction f.
6. Quel est le maximum de la fonction f sur $[-1 ; 3]$.
   Préciser la valeur pour laquelle il est atteint.

Exercice 16 **corrigé disponible**



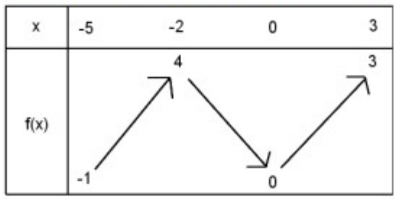
1) donner le domaine de définition de la fonction f représentée par la courbe $\mathcal{C}$, ci contre.
2) donner les images de -3 et de 5
3) donner le ou les antécédents de 1 , -5 et 7 si ils existent.
4) faire le tableau de variation de la fonction

x	
f(x)	

5) résoudre les inéquations suivantes :
$f(x) \geq 3$; $f(x) \leq -1$; $f(x) > -5$; $f(x) \geq 6$

Exercice 17 **corrigé disponible**

Comparer si possible les valeurs suivantes, si elles ne sont pas comparables dire pourquoi.



1) $f(-5)$, $f(-3)$ et $f(-2)$
2) $f(-2)$ et $f(-1)$
3) $f(-1)$ et $f(-3)$