plus de bonnes notes 03/03/24 Spé maths

Exercice 13 :

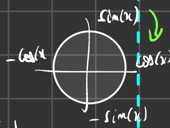
1) Le triangle ETA est rectangle en E.

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{25}{x}}$$

De même, $\boxed{\tan\beta = \frac{30{,}6}{x}}$.

2) Soit $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tan est dérivable comme quotient de 2 f° dérivables sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$$



Où $u(x) = \sin(x)$ $\quad v(x) = \cos(x)$

$u'(x) = \cos(x)$ $\quad v'(x) = -\sin(x)$.

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\times\cos(x) - (-\sin(x))\times\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\tan'(x) = \frac{1 \oplus}{\cos^2(x) \oplus} > 0$$

$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) > 0$, donc tan est strictement croissante sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha)$$

$$\tan(\gamma) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\times\tan(\alpha)} = \frac{\frac{30{,}6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30{,}6}{x}\times\frac{25}{x}}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{\frac{5{,}6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} = \frac{\frac{5{,}6}{x}}{\frac{x^2+765}{x^2}}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{5{,}6}{\cancel{x}} \times \frac{x\times x}{x^2+765} = \boxed{\frac{5{,}6x}{x^2+765}}$$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}$$

4. Soit $x \in]0;50]$, $f(x) = x + \frac{765}{x}$

$x \in]0;50]$ car $T \in [EM]$

Or

$$f(x) = x + \frac{765}{x}$$

$$f(x) = \frac{x^2+765}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\frac{x}{x^2+765}}$$

Or la f° $x \mapsto \frac{5{,}6x}{x^2+765}$ et

$x \mapsto \frac{x}{x^2+765}$

ont les mêmes variations car $5{,}6 > 0$.

Or $f(x)$ et $x \mapsto \frac{x}{x^2+765}$ ont des variations contraires par passage à l'inverse.

on en déduit que γ est maximal lorsque f est minimal.

Étudions les variations de f sur $]0;50]$.

$$f(x) = x + \frac{765}{x} = x + 765\times\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 + 765\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 765}{x^2}$$

$\forall x \in]0;50]$, $x^2 > 0$

$x^2 - 765 = 0$.

$x^2 = 765$.

$x = \sqrt{765}$ ou $\cancel{x = -\sqrt{765}}$

$x \simeq 28\,m$.

Or $\tan(\gamma) = \frac{5{,}6x}{x^2+765}$

$$\tan(\gamma) = \frac{5{,}6\times\sqrt{765}}{2\times765}$$

$$\gamma = \text{Arctan}\left(\frac{5{,}6\times\sqrt{765}}{2\times765}\right)$$

$\gamma = 0{,}10\,rad$ $\quad \pi \to 180$ $\quad 0{,}10$

n°15 :

1) Soit $x \in [-\pi;0[\,\cup\,]0;\pi] = [-\pi;\pi]\setminus\{0\}$

D_f est centré en 0 de plus.

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\cos(-x)-1} = \frac{\cos(x)}{\cos(x)-1} = f(x)$$

f est paire et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à (Oy).

2) On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \cos(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \cos(x) - 1 = 0^-$

Par quotient des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty}$

3) f est dérivable sur $]0;\pi]$ comme quotient de f° dérivable sur $]0;\pi]$.

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)-1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

où $u(x) = \cos(x)$ $\quad v(x) = \cos(x) - 1$

$u'(x) = -\sin(x)$ $\quad v'(x) = -\sin(x)$.

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)(\cos(x)-1) + \cos(x)\sin(x)}{(\cos(x)-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)(1-\cos(x)+\cos(x))}{(\cos(x)-1)^2} = \frac{\sin(x)}{(\cos(x)-1)^2}$$

$\forall x \in]0;\pi]$, $(\cos(x)-1)^2 > 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$ $\Big\}$ par quotient :

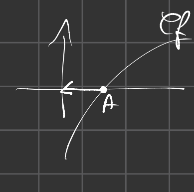
$$f'(x) \geqslant 0$$

f est croissante sur $]0;\pi]$.

x	0		π
$f'(x)$	‖	$+$	
Var de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

$$f(\pi) = \frac{\cos(\pi)}{\cos(\pi)-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

4) $f(x) = 0$



$$\frac{\cos(x)}{\cos(x)-1} = 0.$$

$\cos(x) = 0$.

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ $\quad A\left(\frac{\pi}{2};0\right)$. $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} = 0.$

$T_{\frac{\pi}{2}}$: $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right)^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

$T_{\frac{\pi}{2}} : y = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0$

$\boxed{y = x - \frac{\pi}{2}}$ (en A)

5) Éq° de la tangente en π :

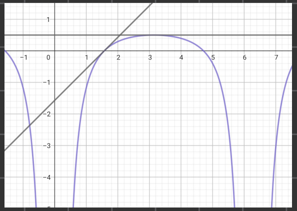
$T_{\pi} : y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$

$f'(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{(\cos(\pi) - 1)^2} = 0$

$f(\pi) = \frac{\cos(\pi)}{\cos(\pi) - 1}$

$f(\pi) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$\boxed{T_{\pi} : y = \frac{1}{2}}$



$\sum \vec{F_{ext}} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt}$

$-\frac{d[X](t)}{dt} = k \times [X](t)$

$y' = y$

$f(0) = 1$