Exercice n°12.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part :

$$u_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \qquad u_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

D'autre part $A \times u_n$:

$$\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 \times j_n + 0{,}525\, a_n \\ 0{,}625 \times j_n + 0{,}625\, a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = u_{n+1}$$

b) $$u_1 = A \times u_0 = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}125 \times 200 + 0{,}525 \times 500 \\ 0{,}625 \times 200 + 0{,}625 \times 500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 287{,}5 \\ 437{,}5 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 287 \\ 437 \end{pmatrix}$$

1)c) On sait que $\begin{cases} u_{n+1} = A \times u_n \\ u_0 \end{cases}$

A est diagonalisable ssi $\exists$ P inversible et une mat Diag t.q. $A = PDP^{-1}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

Conjecture : (P_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A^n \times u_0$.

Initialisation : $u_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$

$$A^0 \times u_0 = I_2 \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}$$

P_0 est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie et on veut prouver que $u_{n+1} = A^{n+1} \times u_0$.

$$u_{n+1} = A \times u_n$$

HR : $u_n = A^n \times u_0$

$$u_{n+1} = A \times A^n \times u_0$$

$$\boxed{u_{n+1} = A^{n+1} \times u_0}$$

$(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_0 est vraie et $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$

Donc $\boxed{u_n = A^n \times u_0}$

2)a). $$QD = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \times (-0{,}25) + 3 \times 0 & 7 \times 0 + 3 \times 1 \\ -5 \times (-0{,}25) + 5 \times 0 & -5 \times 0 + 5 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1{,}75 & 3 \\ 1{,}25 & 5 \end{pmatrix}$$

$$QD \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}75 & 3 \\ 1{,}25 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1{,}75 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}1 & -1{,}75 \times (-0{,}06) + 3 \times 0{,}14 \\ 1{,}25 \times 0{,}1 + 5 \times 0{,}1 & 1{,}25 \times (-0{,}06) + 5 \times 0{,}14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} = A$$

$\mathbb{N}^*$

2)b) Soit P_n : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

Initialisation : $QD^1 \times Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$.

P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $QD^nQ^{-1} = A^n$.

M.q. $QD^{n+1}Q^{-1} = A^{n+1}$

$$QD^nQ^{-1} = A^n$$

$$QD^nQ^{-1} \times A = A^n \times A$$

$$QD^n \cancel{Q^{-1}} \times \cancel{Q} DQ^{-1} = A^{n+1}$$

$$\boxed{QD^{n+1}Q^{-1} = A^{n+1}}$$

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = QD^nQ^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0{,}25^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-0{,}25)^n \times 0{,}7 + 0{,}3 \end{pmatrix}$$

3)a) $$u_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \times u_0.$$