plus de bonnes notes

TG - spé maths - 13/03/24 Éq différentielles

Éq° : $2x+3=5$

x : inconnue : $x \in \mathbb{R}$

x est un nombre réel.

Éq° différentielle :

$$2y'+4y=8$$

L'inconnue est une fonction : y désigne une fonction.

Ex : Exemple d'équation différentielle.

$$y'=y$$

$f(x)=e^x$

$F(x) \longrightarrow f(x) \longrightarrow f'(x)$

$f(x)=x$. $f'(x)=1$

$F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$

$f(x)=\frac{1}{x}$

$F(x)=\ln(x)$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$f(x)=5e^{2x}$

$f'(x)=10e^{2x}$

$F(x)=\frac{5}{2}e^{2x}$

Exercice 2

1) $f(x)=e^x-2e^{-x}$

$F(x)=e^x+2e^{-x}$

2) $f(x)=\frac{2x}{(x^2+3)^2}=\frac{u'(x)}{u(x)^2}$

$F(x)=-\frac{1}{u(x)}=-\frac{1}{x^2+3}$

3) $f(x)=\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{1}{4}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

$F(x)=\frac{1}{4}\times 2\times\sqrt{u(x)}$

$F(x)=\frac{1}{2}\times\sqrt{x^2+1}$

4) $f(x)=\frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$

$f(x)=3\times\frac{(3x^2-1)}{(x^3-x)^2}$

$F(x)=3\times\frac{-1}{x^3-x}=\frac{-3}{x^3-x}$

$g(x)=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$

$x^2=1$

$x=1$

$\frac{u'}{u^n}$

$\downarrow$

$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$

5) $f(x)=(4-x)(x^2-8x)^5$

$u'\times u^n$

$\frac{u^{n+1}}{n+1}$

$u(x)=x^2-8x$

$u'(x)=2x-8$

$f(x)=-\frac{1}{2}\times(2x-8)\times(x^2-8x)^5$

$F(x)=-\frac{1}{2}\frac{(x^2-8x)^6}{6}$

$$\boxed{F(x)=\frac{-(x^2-8x)^6}{12}}$$

Exercice n° 3

1) $y'-\frac{1}{2}y=0$

$y'=\frac{1}{2}y$

$f(x)=C\times e^{\frac{1}{2}x}$ où $C\in\mathbb{R}$

2) $2y'-3y=8y+4y'$

$2y'-4y'=8y+3y$

$-2y'=11y$

$\boxed{y'=-\frac{11}{2}y}$

$y'=ay$

$f(x)=C\times e^{-\frac{11}{2}x}$ $C\in\mathbb{R}$

3) $5y'+3y=0$

$y'=\frac{-3}{5}y$

$f(x)=Ce^{-\frac{3}{5}x}$ $C\in\mathbb{R}$

4) $-\frac{3}{2}y'-\sqrt{2}y=0$

$y'=\sqrt{2}y\times\left(-\frac{2}{3}\right)$

$y'=\frac{-2\sqrt{2}}{3}y$

$f(x)=Ce^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}x}$ $C\in\mathbb{R}$

n°4 : 2) et 3)

2) $2y'-3y=2y+3y'$ $F(0)=5$

$-y'=5y$

$y'=-5y$

$F(x)=C\times e^{-5x}$ où $C\in\mathbb{R}$

$F(0)=5$

$Ce^{-5\times 0}=5$

$\boxed{C=5}$

$F(x)=5e^{-5x}$

3) $\frac{1}{2}y'+y=\frac{1}{2}y-y'$

$\frac{1}{2}y'+y'=\frac{1}{2}y-y$

$\frac{3}{2}y'=-\frac{1}{2}y$

$y' = -\frac{1}{3}y$

$F(x) = Ce^{-\frac{1}{3}x}$

Or $F(3) = \frac{1}{e}$

$Ce^{-\frac{1}{3}\times 3} = \frac{1}{e}$ $\qquad F(x) = e^{-\frac{1}{3}x}$

$$\frac{C\,\cancel{\frac{1}{e}}}{\cancel{\frac{1}{e}}} = \frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}}$$

$C = 1$

n° 5 $\qquad \varphi(x) = -2x-4$

Eq° H.

$2y' - y = 2x.$ $\qquad 2y'-y=0$

$2y' = y + 2x$ $\qquad y' = \frac{1}{2}y$

Spg $\qquad$ Sgh

$\phi(x) = Ce^{\frac{1}{2}x}, C \in \mathbb{R}$

$\boxed{F(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 2x - 4}$

$\varphi(x) = ax+b.$

$2a = ax+b+2x.$

$2a-b = (a+2)x.$

$0x+0 = (a+2)x+b-2a.$

$$\begin{cases} a+2 = 0 \\ b-2a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

$\varphi(x) = -2x-4$

$x^2 = 1$

$x = 1$

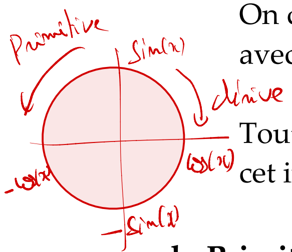
$x = -1.$

$ax+b = mx+p.$

Primitives et équations différentielles – Fiche de cours

1. Equation différentielle y'=f

a. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle



On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I avec F'=f

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle (à une constante d'intégration près)

b. Primitive des fonctions de références

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x)=a$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}\quad n\neq 1$	$F(x)=-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

$-\dfrac{1}{2x^2}$

$\dfrac{1}{x^3}$

$(2\sqrt{x})' = \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c. Opération des primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f=u+v$	$F=U+V$	$D_u\cap D_v$
$f=u'.u^n$	$F=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	D_u
$f=\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}$	$D_u\cap u>0$
$f=\dfrac{u'}{u^2}$	$F=-\dfrac{1}{u}$	$D_u\cap u\neq 0$
$f=u'.e^u$	$F=e^u$	D_u
$f=\dfrac{u'}{u}$	$F=\ln\lvert u\rvert$	$D_u\cap u\neq 0$
$f=u'\sin u$	$F=-\cos u$	D_u
$f=u'\cos u$	$F=\sin u$	D_u

$f=\dfrac{u'}{u^n}$ $\qquad F= -\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$

2. Equation différentielle y'=ay

L'équation différentielle $y'=ay$ est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre.

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax}\quad C\in\mathbb{R}$$

Pour résoudre C on utilise une condition

3. Equation différentielle y'=ay+b a≠0

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}\quad C\in\mathbb{R}$$

Pour résoudre C on utilise une condition

Spg Sp a

4. Equation différentielle y'=ay+f a≠0

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+f(x)$ sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax}+\phi(x) \quad C\in\mathbb{R}$$

$\phi(x)$ est une fonction de même nature que $f(x)$

Pour résoudre C on utilise une condition

5. Principe de résolution des équations différentielles

Solution générale = Solution homogène + solution particulière

$\cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$

Primitives et équations différentielles – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$

2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$

3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$

4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 8$

Exercice 2 **corrigé disponible**

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$

2. $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}$

3. $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

4. $x \mapsto \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$

5. $f(x)=(4-x)\cdot(x^2-8x)^5$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \frac{1}{2}y = 0$

2. $2y' - 3y = 8y + 4y'$

3. $5y' + 3y = 0$

4. $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}\,y = 0$

Exercice 4 **corrigé disponible**

Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée qui respecte la condition précisée.

1. $y' + \sqrt{2}\,y = 0$ avec $\mathrm{F}(\sqrt{2}) = 1$.

2. $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $\mathrm{F}(0) = 5$.

3. $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{2}y - y'$ avec $\mathrm{F}(3) = \frac{1}{e}$.

Exercice 5 **corrigé disponible**

Après avoir déterminé une fonction affine φ solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : 2y' - y = 2x$, déterminer la solution F de (E) telle que $\mathrm{F}(0) = -2$.

Exercice 6

Après avoir déterminé une fonction polynôme du second degré φ solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y' + 2y = 4x^2 - 2x + 1$, déterminer la solution F de (E) telle que $\mathrm{F}(0) = 4$.

Exercice 7

Après avoir déterminé une fonction φ de la forme $x \mapsto mxe^{2x}$ (avec $m \in \mathbb{R}$) solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y' - 2y = 2e^{2x}$, déterminer la solution F de (E) telle que $\mathrm{F}(0) = -1$.

Exercice 8

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{(x+2)^2}$; $\mathrm{I} =]-\infty ; -2[$

2. $f : x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$; $\mathrm{I} =]-3 ; +\infty[$

Exercice 9

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto -xe^{x^2-1}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ **2.** $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 10

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $y' = e^{2x} + 2e^{-\frac{x}{2}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$; $y_0 = \dfrac{1}{2}$

2. $y' = 2x(x^2+1)^3$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$; $y_0 = \dfrac{3}{4}$

Exercice 11 **corrigé disponible**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$; $x_0 = 2$; $y_0 = -\sqrt{2}$

2. $y' = 3e^x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; $x_0 = 1$; $y_0 = e$

Exercice 12 **corrigé disponible**

f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k est un réel.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Si F est positive et dérivable sur I avec $\mathrm{F}' = f$, alors f est croissante sur I.

2. Si F est décroissante et dérivable sur I avec $\mathrm{F}' = f$, alors f est négative sur I.

3. Si $\mathrm{F}' = f$, alors f est une primitive de F sur I.

4. Si $\mathrm{F}' = f$, alors F est une primitive de f sur I.

5. Si F est une primitive de f sur I, alors $\mathrm{F} + k$ est une primitive de f sur I.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+9x^2+12x+2}{(x+2)^2}.$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 15

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y' + 3y = 0$ et $y(2) = 1$. **2.** $5y' - 2y = 0$ et $y(5) = \mathrm{e}$.

Exercice 16

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\sqrt{3}\,y' + y = 0$ et $y(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.

2. $y' - \pi^2 y = 0$ et $y\left(\dfrac{1}{\pi}\right) = \pi$.

Exercice 17

1. $2y' + y = x + 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$.

2. $y' + 3y = 2x - 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$.

3. $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

4. $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice 18 **corrigé disponible**

1) Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \qquad (E')$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$

soit une solution de (E').

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).

Résoudre l'équation (E').

3) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$$

4) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de h.

5) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h et Γ celle de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de Γ.

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Exercice 19 corrigé disponible

1) On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction ϕ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi' = \phi$ et $\phi(0) = 1$. On considère un réel a.
   a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{ax}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
   b. On considère une fonction g solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est constante.
   c. En déduire l'ensemble des solutions de $y' = ay$.
2) On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + \cos x$.
   a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E).
   b. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$.
   c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).
   d. En déduire les solutions de (E).
   e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 20 corrigé disponible

On considère les deux équations différentielles définies sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) \quad y' + (1 + \tan x)y = \cos x \qquad\qquad (E_0) \quad y' + y = 1$$

1) Déterminer les solutions de (E_0).
2) On considère deux fonctions f et g dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_0).

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice 21

$\boxed{1}$ On considère l'équation différentielle $\frac{y'}{3} + y = x^3$ (E).

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{2}$ On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 9e^{-2x}$ (E).

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{3}$ Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$.

$\boxed{4}$ Résoudre l'équation différentielle $2y' = -y$.

$\boxed{5}$ Résoudre l'équation différentielle $2y' = 5y$.

$\boxed{6}$ Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 1$.

$\boxed{7}$ Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' = 7y$ telle que $f(1) = e$.

Exercice 22

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 3y$
2) $y' + 2y = 0$
3) $y' = 2y + 1$
4) $y + 3y' = 2$
5) $2y + 3y' - 1 = 0$
6) $2y' = y - 1$

Exercice 23

Résoudre les équations différentielles proposées avec la condition initiale proposée :

1) $y = -5y'$ avec $f(-2) = 1$
2) $y + 2y' = 0$ avec $f'(-2) = \frac{1}{2}$

Exercice 24

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$.

1) Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
3) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 25 **corrigé disponible**

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ $\qquad I=]4\ ;+\infty[$
2. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ $\qquad I=]0\ ;+\infty[$
3. $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}$ $\qquad I=]-\pi\ ;\pi[$
4. $f(x)=\tan x$ $\qquad I=]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\dfrac{\pi}{2}[$
5. $f(x)=\dfrac{16x+4}{4x^2+2x+1}$ $\qquad I=\mathbb{R}$

Exercice 26 **corrigé disponible**

Soit $f(x)=\cos^3 x$

1. Montrer que pour tout x $\in\mathbb{R}$ on a $f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$.

2. En déduire la primitive F telle que $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Exercice 27 **corrigé disponible**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de l'ensemble de f :

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}$$

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle]3 ;+∞[.

Exercice 28

On considère deux fonctions f et F définies sur I.

Dans chaque cas, montrer que F est une primitive de f sur I.

1. $F(x)=(x-1)(-x+4)$ $\qquad f(x)=-2x+5$ $\qquad I=\mathbb{R}$
2. $F(x)=(4x+1)e^{-x^2}$ $\qquad f(x)=(-8x^2-2x+4)e^{-x^2}$ $\qquad I=\mathbb{R}$
3. $F(x)=\dfrac{3x+1}{x-5}$ $\qquad f(x)=\dfrac{-16}{(x-5)^2}$ $\qquad I=\mathbb{R}\setminus\{5\}$
4. $F(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}}$ $\qquad f(x)=\sqrt{5x+2}$ $\qquad I=]-\dfrac{2}{5}\ ;+\infty[$

Exercice 29

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^5-\dfrac{15}{2}x^3+\dfrac{3}{7}x+\dfrac{1}{2}$ $\qquad I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\qquad I=]\dfrac{1}{3}\ ;+\infty[$
3. $f(x)=(2x+1)(x^2+x-7)$ $\qquad I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=(3x-1)^6$ $\qquad I=\mathbb{R}$
5. $f(x)=\dfrac{4}{(2x-1)^4}$ $\qquad I=]\dfrac{1}{2}\ ;+\infty[$
6. $f(x)=6xe^{x^2+1}$ $\qquad I=\mathbb{R}$

Exercice 30

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sin(x)\cos^2(x)$ $\qquad I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=4\cos(2x+1)$ $\qquad I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\qquad I=]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\dfrac{\pi}{2}[$
4. $f(x)=\cos x\sin^4 x$ $\qquad I=\mathbb{R}$
5. $f(x)=\sin^2 x$ $\qquad I=\mathbb{R}$

Exercice 31

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

   a) $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 3}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

   b) $g(x) = \dfrac{5}{(2x-1)^3}$, $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$

   c) $h(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$, $\mathrm{I} =]0 ; +\infty$

2) Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

   a) Montrer que : $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}$

   b) En déduire une primitive de f sur $]1 ; +\infty[$

Exercice 32

Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y' = 2y - 3y^2$$

On cherche une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$u(0) = \frac{1}{4}$$

1. Soit u une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction v sur $\mathbb{R}$ par $v = \dfrac{1}{u}$.
   Démontrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :
   (i) u est solution de (E) et $u(0) = \dfrac{1}{4}$.
   (ii) v est solution de (E') : $y' = -2y + 3$ et $v(0) = 4$.
2. Résoudre (E') et déterminer v.
3. En déduire la résolution de (E) et la fonction u.