Fonction	Primitive
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v+v'u$	$u\times v$
$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

$$y' = ay$$

$$f(x) = Ce^{ax} \quad C\in\mathbb{R}$$

$$y' = ay+b$$

$$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$y' = ay + f(x)$$

S_{pg} S_{gh}

$$S_{gg} = S_{pg} + S_{gh}$$

Exercice 6

Après avoir déterminé une fonction polynôme du second degré φ solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 4x^2 - 2x + 1$, déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = 4$.

Soit $\varphi(x) = ax^2+bx+c$ où $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ solut° de (E). Déterminat° d'une sol° ptcl :

$\varphi'(x) = 2ax+b$. On subtitue dans (E) :

$$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 4x^2-2x+1$$

$$2ax + b + 2(ax^2+bx+c) = 4x^2-2x+1$$

$$2ax+b+2ax^2+2bx+2c = 4x^2-2x+1$$

$$2ax^2 + 2(a+b)x + b+2c = 4x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2(a+b) = -2 \\ b+2c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ a+b = -1 \\ c = \frac{1-b}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2+b = -1 \\ c = \frac{1-b}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

$2x+3 = 5$

$\varphi(x) = 2x^2-3x+2$ est une sol° particulière de (E)

Solution générale de l'éq° homogène :

$$y' + 2y = 0$$

$$y' = -2y$$

$$\boxed{\phi(x) = Ce^{-2x}} \text{ où } C\in\mathbb{R}$$

Solution générale de (E) :

$$f(x) = \varphi(x) + \phi(x)$$

$$\boxed{f(x) = 2x^2-3x+2+Ce^{-2x}}$$

Déterminat° de C :

$$f(0) = 4$$

$$2 + Ce^{-2\times 0} = 4$$

$2 + ax + (b+c)$

$ax^2 + (b+c)$

$a + (2b+2c)$

$$C = 4-2 = 2$$

$$\boxed{f(x) = 2x^2-3x+2+2e^{-2x}}$$

$f(x) = e^{u(x)}$

$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

$$f(x) = e^{-3x}$$

$$f'(x) = -3\times e^{-3x}$$

n° 18 :

1) $2y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{2}y$

Sol° : $\varphi(x) = C\times e^{-\frac{1}{2}x}$ où $C\in\mathbb{R}$

2) a) (E') : $2y'+y = e^{-\frac{1}{2}x}(x+1)$

$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2+px)$ est sol° de (E')

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où :

$$f(x) = u(x)\times v(x)$$

$u(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ $\quad v(x) = mx^2+px$

$u'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ $\quad v'(x) = 2mx+p$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2+px) + (2mx+p)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}(mx^2+px) + 2mx+p\right)$$

$$\boxed{f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}px + 2mx + p\right)}$$

$$\boxed{f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}mx^2 + \left(2m-\frac{1}{2}p\right)x + p\right)}$$

$$2y'+y = e^{-\frac{1}{2}x}(x+1) \quad (E')$$

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(-mx^2+(4m-p)x+2p\right) + e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2+px) = e^{-\frac{1}{2}x}(x+1)$$

$$\cancel{e^{-\frac{1}{2}x}}\left(\cancel{-mx^2} + (4m-p)x + 2p + \cancel{mx^2} + px\right) = \cancel{e^{-\frac{1}{2}x}}(x+1)$$

$$4m\times x + 2p = x+1$$

$$\begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$$

g sol° de $(E') \iff g-f$ sol° de (E)

$$2g'+g = e^{-\frac{1}{2}x}(x+1) \iff 2(g-f)'+g-f = 0$$

$$2(g-f)'+g-f = 0$$

$$2g'-2f'+g-f = 0$$

$$2g'+g = +2f'+f$$

$$2g'+g = 2\times e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}mx^2+\left(2m-\frac{1}{2}p\right)x+p\right)+e^{-\frac{1}{2}x}(mx^2+px)$$

$$2g'+g = 2e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)+e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right)$$

$$2g'+g = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)+e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right)$$

$$\boxed{2g'+g = e^{-\frac{1}{2}x}(x+1)}$$

Solution générale de E' :

$$H(x) = \varphi(x)+f(x)$$

$$\boxed{H(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)}$$

3) Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2+2x)$$

$$h(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right)$$

$$h'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ ne dépend que de : $-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ dont on calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{1}{4}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{8}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$\Delta = \frac{1}{16}+\frac{1\times 4}{4\times 4} = \frac{5}{16} > 0$$

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}}{2\times\left(-\frac{1}{8}\right)} = 1+\sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{5}{16}}}{2\times\left(-\frac{1}{8}\right)} = 1-\sqrt{5}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Var° de f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

4) $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2+2x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ — Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}(x^2+2x)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x = +\infty$; $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ — Par composition de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$.