plus de bonnes notes

Exercice 7

Après avoir déterminé une fonction φ de la forme $x \mapsto mxe^{2x}$ (avec $m \in \mathbb{R}$) solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 2e^{2x}$, déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = -1$.

$\varphi(x) = mxe^{2x}$. On injecte $\varphi(x)$ dans (E) pour connaître la valeur de m.

$\varphi(x) = mxe^{2x}$

$\varphi'(x) = m \times e^{2x} + 2e^{2x} \times mx$

$\varphi'(x) = e^{2x}(m + 2mx)$

D'où

$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) = 2e^{2x}$$

$$e^{2x}(m+2mx) - 2mxe^{2x} = 2e^{2x}$$

$$e^{2x}(m + 2mx - 2mx) = 2e^{2x}$$

$$m\cancel{e^{2x}} = 2\cancel{e^{2x}}$$

$$m = 2$$

Finalement $\boxed{\varphi(x) = 2xe^{2x}}$

Déterminons la solution générale de l'équation homogène :

$$y' - 2y = 0$$

$$y' = 2y$$

$\boxed{\phi(x) = Ce^{2x}}$ $C \in \mathbb{R}$.

Solution générale de l'éq° E :

$$F(x) = \varphi(x) + \phi(x)$$

$\boxed{F(x) = 2xe^{2x} + Ce^{2x}}$ $C \in \mathbb{R}$

$y' - 2y = f(x)$

$F(0) = -1$

$2 \times 0 \times e^{2\times 0} + Ce^{2\times 0} = -1$

$C = -1$

$\boxed{F(x) = 2xe^{2x} - e^{2x}}$

$F(x) = e^{2x}(2x - 1)$

n°18.

(E) : $2y' + y = 0$

$2y' = -y$

$y' = -\frac{1}{2}y$

Sol° de (E) : $\boxed{\varphi(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}}$, $C \in \mathbb{R}$

2.a. $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$. (E)'

$x \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$ $\quad (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \times (mx^2 + px) + (2mx + p)e^{-\frac{x}{2}}$

$2\times\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px) + (2mx+p)e^{-\frac{x}{2}}\right) + e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px)$
$= e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

$\cancel{-e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px)} + 2(2mx+p)e^{-\frac{x}{2}} + \cancel{e^{-\frac{x}{2}}(mx^2+px)} = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

$2(2mx+p)\cancel{e^{-\frac{x}{2}}} = \cancel{e^{-\frac{x}{2}}}(x+1)$

$4mx + 2p = x + 1$

$\begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\boxed{\varphi(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}}$

$y' = ay$

$f(x) = ce^{ax}$

$y' = ay + b$

$f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

2.b. g sol° de (E')

$\iff$

$(g-f)$ sol° de (E).

$\boxed{2g' + g = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)}$

$\iff$

$\boxed{2(g-f)' + (g-f) = 0}$

Dna : $2(g-f)' + (g-f) = 0$

$\iff 2 \times (g' - f') + g - f = 0$

$\iff 2g' - 2f' + g - f = 0$

$(ax)' = a$ $\quad -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}x$

$\iff 2g' - \left(-e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 2\left(2 \times \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right) + g - e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right) = 0$

$\iff 2g' + \cancel{e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)} - 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} + g - \cancel{e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)} = 0$

$\iff 2g' - (x+1)e^{-\frac{x}{2}} + g = 0$

$\iff \boxed{2g' + g = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}}$

(E)' : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$

$\boxed{f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)}$ est une sol° particulière de (E)'

$$2y' + y = 0$$

$\boxed{\varphi(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x} \quad C \in \mathbb{R}}$

$F(x) = f(x) + \varphi(x)$

$F(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right) + Ce^{-\frac{1}{2}x}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

3) $x \in \mathbb{R}$ $\quad h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$

$h'(x) =$

$(e^u)' = u'e^u$ $\quad \left(-\frac{x}{2}\right)' = -\frac{1}{2}$

$h(x) = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)\right)$

$h'(x) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x) + (2x+2)e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$h'(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}(x^2 + 2x) + 2x + 2\right)$

$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}x^2 - 1x + 2x + 2\right)$

$h'(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 2\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} > 0$ donc le signe de $h'(x)$ ne dépend que de $-\frac{1}{2}x^2 + x + 2$

$\Delta = 1^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2$

$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 + \sqrt{5}$

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - \sqrt{5}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
h	$?$	$\searrow$	$h(1-\sqrt{5})$	$\nearrow$	$h(1+\sqrt{5})$	$\searrow$	$?$

4)

$$h(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} \left(x^2 + 2x \right)$$

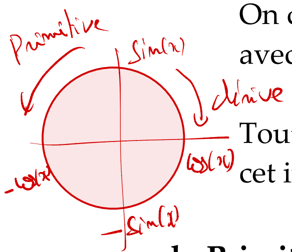
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x}{2} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0 \end{array}\right\}$$

Par composition de lim on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$

Primitives et équations différentielles – Fiche de cours

1. Equation différentielle y'=f

a. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle



On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I avec F'=f

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle (à une constante d'intégration près)

b. Primitive des fonctions de références

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x)=a$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ $n\neq 1$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{x^3}$ $-\frac{1}{2x^2}$

$(2\sqrt{x})' = 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

c. Opération des primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f=u+v$	$F=U+V$	$D_u\cap D_v$
$f=u'.u^n$	$F=\frac{u^{n+1}}{n+1}$	D_u
$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}$	$D_u\cap u>0$
$f=\frac{u'}{u^2}$	$F=-\frac{1}{u}$	$D_u\cap u\neq 0$
$f=u'.e^u$	$F=e^u$	D_u
$f=\frac{u'}{u}$	$F=\ln\lvert u\rvert$	$D_u\cap u\neq 0$
$f=u'\sin u$	$F=-\cos u$	D_u
$f=u'\cos u$	$F=\sin u$	D_u

$f=\frac{u'}{u^n}$ $F=-\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$

2. Equation différentielle y'=ay

L'équation différentielle $y'=ay$ est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre sans second membre.

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax}\quad C\in\mathbb{R}$$

Pour résoudre C on utilise une condition

3. Equation différentielle y'=ay+b a≠0

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}\quad C\in\mathbb{R}$$

Pour résoudre C on utilise une condition

Spg. Sp.a

4. Equation différentielle y'=ay+f a≠0

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+f(x)$ sont de la forme :

$$y(x)=Ce^{ax}+\phi(x) \quad C\in\mathbb{R}$$

$\phi(x)$ est une fonction de même nature que $f(x)$

Pour résoudre C on utilise une condition

5. Principe de résolution des équations différentielles

Solution générale = Solution homogène + solution particulière

$\cos(x) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$

Primitives et équations différentielles – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$
2. $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$
3. $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$
4. $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 8$

Exercice 2 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$
2. $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}$
3. $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$
4. $x \mapsto \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$
5. $f(x)=(4-x)\cdot(x^2-8x)^5$

Exercice 3 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \frac{1}{2}y = 0$
2. $2y' - 3y = 8y + 4y'$
3. $5y' + 3y = 0$
4. $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}\,y = 0$

Exercice 4 corrigé disponible

Dans chaque cas, déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée qui respecte la condition précisée.

1. $y' + \sqrt{2}\,y = 0$ avec $\mathrm{F}(\sqrt{2}) = 1$.
2. $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $\mathrm{F}(0) = 5$.
3. $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{2}y - y'$ avec $\mathrm{F}(3) = \frac{1}{e}$.

Exercice 5 corrigé disponible

Après avoir déterminé une fonction affine φ solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : 2y' - y = 2x$, déterminer la solution F de (E) telle que $\mathrm{F}(0) = -2$.

Exercice 6

Après avoir déterminé une fonction polynôme du second degré φ solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y' + 2y = 4x^2 - 2x + 1$, déterminer la solution F de (E) telle que $\mathrm{F}(0) = 4$.

Exercice 7

Après avoir déterminé une fonction φ de la forme $x \mapsto mxe^{2x}$ (avec $m \in \mathbb{R}$) solution particulière de l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y' - 2y = 2e^{2x}$, déterminer la solution F de (E) telle que $\mathrm{F}(0) = -1$.

Exercice 8

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto -\dfrac{1}{(x+2)^2}$; $\mathrm{I} =]-\infty\,;-2[$

2. $f : x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$; $\mathrm{I} =]-3\,;+\infty[$

Exercice 9

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto -xe^{x^2-1}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ **2.** $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 10

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $y' = e^{2x} + 2e^{-\frac{x}{2}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$; $y_0 = \dfrac{1}{2}$

2. $y' = 2x(x^2+1)^3$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$; $y_0 = \dfrac{3}{4}$

Exercice 11 **corrigé disponible**

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$; $x_0 = 2$; $y_0 = -\sqrt{2}$

2. $y' = 3e^x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; $x_0 = 1$; $y_0 = e$

Exercice 12 **corrigé disponible**

f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k est un réel.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1. Si F est positive et dérivable sur I avec $\mathrm{F}' = f$, alors f est croissante sur I.

2. Si F est décroissante et dérivable sur I avec $\mathrm{F}' = f$, alors f est négative sur I.

3. Si $\mathrm{F}' = f$, alors f est une primitive de F sur I.

4. Si $\mathrm{F}' = f$, alors F est une primitive de f sur I.

5. Si F est une primitive de f sur I, alors $\mathrm{F} + k$ est une primitive de f sur I.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 12x + 2}{(x+2)^2}.$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 15

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y' + 3y = 0$ et $y(2) = 1$. **2.** $5y' - 2y = 0$ et $y(5) = \mathrm{e}$.

Exercice 16

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\sqrt{3}\,y' + y = 0$ et $y(\sqrt{3}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.

2. $y' - \pi^2 y = 0$ et $y\left(\dfrac{1}{\pi}\right) = \pi$.

Exercice 17

1. $2y' + y = x + 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$.

2. $y' + 3y = 2x - 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$.

3. $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

4. $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

Exercice 18 **corrigé disponible**

1) Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$ (E) dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \qquad (E')$$

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$$

soit une solution de (E').

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - f$ est solution de (E).

Résoudre l'équation (E').

3) Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$$

4) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de h.

5) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h et Γ celle de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$.

a. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de Γ.

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

Exercice 19 corrigé disponible

1) On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction ϕ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\phi' = \phi$ et $\phi(0) = 1$. On considère un réel a.
   a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{ax}$ définie sur $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
   b. On considère une fonction g solution de l'équation différentielle $y' = ay$ et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est constante.
   c. En déduire l'ensemble des solutions de $y' = ay$.
2) On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + \cos x$.
   a. Déterminer les réels a et b pour que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E).
   b. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$.
   c. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).
   d. En déduire les solutions de (E).
   e. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 20 corrigé disponible

On considère les deux équations différentielles définies sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) \quad y' + (1 + \tan x)y = \cos x \qquad\qquad (E_0) \quad y' + y = 1$$

1) Déterminer les solutions de (E_0).
2) On considère deux fonctions f et g dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_0).

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice 21

$\boxed{1}$ On considère l'équation différentielle $\frac{y'}{3} + y = x^3$ (E).

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{2}$ On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 9e^{-2x}$ (E).

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{3}$ Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$.

$\boxed{4}$ Résoudre l'équation différentielle $2y' = -y$.

$\boxed{5}$ Résoudre l'équation différentielle $2y' = 5y$.

$\boxed{6}$ Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ telle que $f(0) = 1$.

$\boxed{7}$ Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y' = 7y$ telle que $f(1) = e$.

Exercice 22

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' = 3y$
2) $y' + 2y = 0$
3) $y' = 2y + 1$
4) $y + 3y' = 2$
5) $2y + 3y' - 1 = 0$
6) $2y' = y - 1$

Exercice 23

Résoudre les équations différentielles proposées avec la condition initiale proposée :

1) $y = -5y'$ avec $f(-2) = 1$
2) $y + 2y' = 0$ avec $f'(-2) = \frac{1}{2}$

Exercice 24

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$.

1) Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).
2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
3) Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 25 **corrigé disponible**

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ $\quad I=]4\ ;+\infty[$

2. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad I=]0\ ;+\infty[$

3. $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}$ $\quad I=]-\pi\ ;\pi[$

4. $f(x)=\tan x$ $\quad I=]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\dfrac{\pi}{2}[$

5. $f(x)=\dfrac{16x+4}{4x^2+2x+1}$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 26 **corrigé disponible**

Soit $f(x)=\cos^3 x$

1. Montrer que pour tout x $\in\mathbb{R}$ on a $f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$.

2. En déduire la primitive F telle que $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Exercice 27 **corrigé disponible**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de l'ensemble de f :

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}$$

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle]3 ;+∞[.

Exercice 28

On considère deux fonctions f et F définies sur I.

Dans chaque cas, montrer que F est une primitive de f sur I.

1. $F(x)=(x-1)(-x+4)$ $\quad f(x)=-2x+5$ $\quad I=\mathbb{R}$

2. $F(x)=(4x+1)e^{-x^2}$ $\quad f(x)=(-8x^2-2x+4)e^{-x^2}$ $\quad I=\mathbb{R}$

3. $F(x)=\dfrac{3x+1}{x-5}$ $\quad f(x)=\dfrac{-16}{(x-5)^2}$ $\quad I=\mathbb{R}\setminus\{5\}$

4. $F(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}}$ $\quad f(x)=\sqrt{5x+2}$ $\quad I=]-\dfrac{2}{5}\ ;+\infty[$

Exercice 29

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^5-\dfrac{15}{2}x^3+\dfrac{3}{7}x+\dfrac{1}{2}$ $\quad I=\mathbb{R}$

2. $f(x)=\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\quad I=]\dfrac{1}{3}\ ;+\infty[$

3. $f(x)=(2x+1)(x^2+x-7)$ $\quad I=\mathbb{R}$

4. $f(x)=(3x-1)^6$ $\quad I=\mathbb{R}$

5. $f(x)=\dfrac{4}{(2x-1)^4}$ $\quad I=]\dfrac{1}{2}\ ;+\infty[$

6. $f(x)=6xe^{x^2+1}$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 30

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sin(x)\cos^2(x)$ $\quad I=\mathbb{R}$

2. $f(x)=4\cos(2x+1)$ $\quad I=\mathbb{R}$

3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\quad I=]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\dfrac{\pi}{2}[$

4. $f(x)=\cos x\sin^4 x$ $\quad I=\mathbb{R}$

5. $f(x)=\sin^2 x$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 31

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

a) $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 3}$, $I = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \dfrac{5}{(2x-1)^3}$, $I = \left]\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} \ln x$, $I =]0 ; +\infty$

2) Soit la fonction f définie sur $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

a) Montrer que : $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{1}{2(x+1)}$

b) En déduire une primitive de f sur $]1 ; +\infty[$

Exercice 32

Soit (E) l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$y' = 2y - 3y^2$$

On cherche une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$u(0) = \frac{1}{4}$$

1. Soit u une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   On définit la fonction v sur $\mathbb{R}$ par $v = \dfrac{1}{u}$.
   Démontrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :
   (i) u est solution de (E) et $u(0) = \dfrac{1}{4}$.
   (ii) v est solution de (E') : $y' = -2y + 3$ et $v(0) = 4$.
2. Résoudre (E') et déterminer v.
3. En déduire la résolution de (E) et la fonction u.