plus de bonnes notes — Spé maths - Tale - 24/03/24

Primitives et éq° diff.

n° 25. $I =]4;+\infty[$

1) $f(x) = \frac{3}{x-4}$ $\quad \frac{u'}{u} \longrightarrow \ln|u|$

$f(x) = 3 \times \frac{1}{x-4}$

$f(x) = 3 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x) = x - 4$.

$F(x) = 3 \times \ln(|u(x)|)$. $\quad |x-4| = x-4$

$= 3 \times \ln(x-4)$. $\quad$ car $x \in]4;+\infty[$.

$u'u^n \rightsquigarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$

2) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x)$.

$f(x) = u'(x) \times u(x)$ $\quad x \in]0;+\infty[$.

$F(x) = \frac{u(x)^2}{2} = \frac{(\ln(x))^2}{2}$.

3) $f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)+1}$ $\quad]-\pi;\pi[$.

$u(x) = \cos^2(x)+1$

$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)+1}$ $\quad u'(x) = 2(-\sin(x)) \times \cos(x)$

$= -2\sin(x) \times \cos(x)$.

$F(x) = -\frac{1}{2} \times \ln(|\cos^2(x)+1|)$.

$F(x) = -\frac{1}{2} \times \ln(\cos^2(x)+1)$.

4) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$f(x) = -1 \times \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad F(x) = -1 \times \ln(\cos(x))$

5) $f(x) = \frac{16x+4}{4x^2+2x+1}$ $\quad x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = 2 \times \frac{8x+2}{4x^2+2x+1}$

$F(x) = 2 \times \ln(|4x^2+2x+1|)$.

Déterminat° des éventuelles valeurs interdites:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times 1$

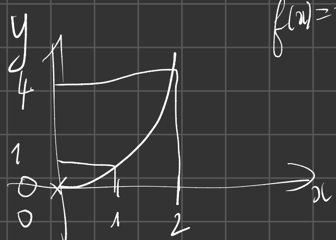
$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $4x^2+2x+1 > 0$.

$F(x) = 2 \times \ln(4x^2+2x+1)$.

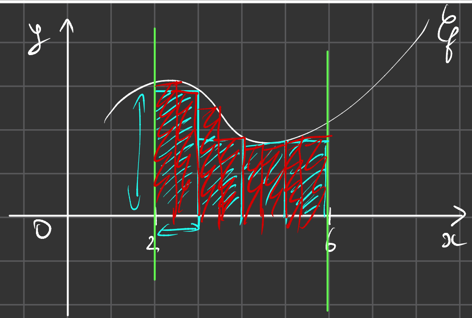
$(u^n)' = n\, u' u^{n-1}$

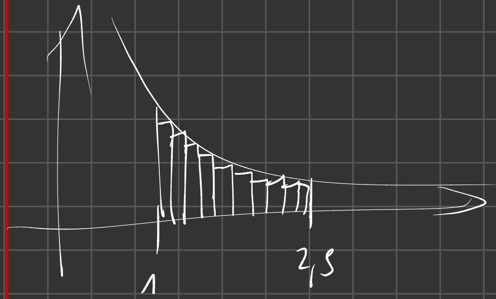
$f(x) = x^2$

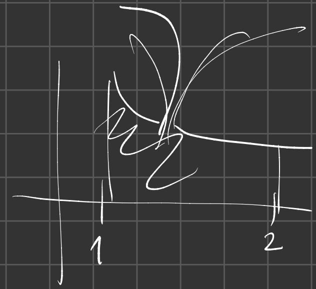


$\frac{1}{2-0} \int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{8}{3} - \frac{0}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}} \simeq 1{,}333$







$\frac{\sin(x)}{x}$

$\int_1^{2,5} f(x)\,dx = F(2,5) - F(1)$

$= [F(x)]_1^{2,5}$

Exercice 1: $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$.

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$I_{n+1} - I_n = \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_{n+1}^{n+2} - [\ln(x)]_n^{n+1}$

$= \ln(n+2) - \ln(n+1) - (\ln(n+1) - \ln(n))$

$= \ln(n+2) - 2\ln(n+1) + \ln(n)$

$= \ln(n+2) - \ln((n+1)^2) + \ln(n)$

$= \ln\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right) + \ln(n)$

$= \ln\left(\frac{(n+2)\,n}{(n+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) < 0$

$= \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx - \left(\int_n^{n+2} \frac{1}{x}\,dx + \int_{n+2}^{n+1} \frac{1}{x}\,dx\right)$

$= \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx - \int_n^{n+2} \frac{1}{x}\,dx - \int_{n+2}^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

$= \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx - \int_n^{n+2} \frac{1}{x}\,dx + \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx$

Calcul intégral – Fiche de cours

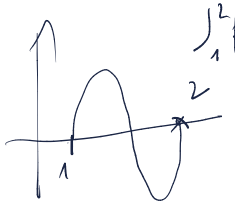
$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$\int_a^b f(x)\,dx$

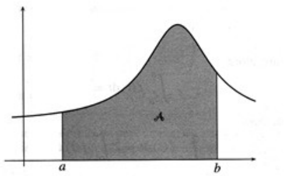
1. Aires et intégrales

a. Intégrale avec une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, et soit a et b appartenant à I tels que a <b.
L'aire du plan située entre la courbe f, les droites d'équations x=a, x=b et l'axe des abscisses, s'appelle l'intégrale de f sur l'intervalle [a ;b].



$\int_1^2 f(x)\,dx$

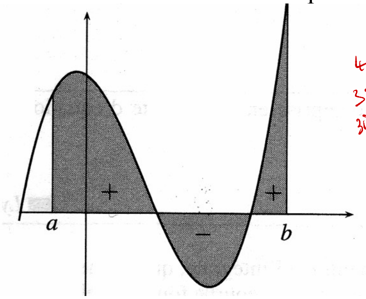


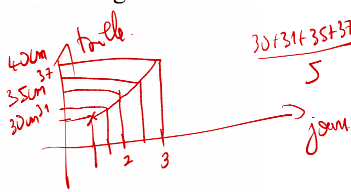
On utilise la notation suivante : $A=\int_a^b f(x)dx$

$\int_1^{2,5} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^{2,5} = \ln(2,5) - \ln(1) = \ln(2,5)$

b. Généralisation aux fonctions continues

On généralise la définition de l'intégrale aux fonctions continues changeant de signe de la manière suivante :
Les parties de surfaces situées en dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement.
Les parties de surfaces situées en dessous de l'axe des abscisses sont comptées négativement.
La somme algébrique des surfaces ainsi définies représente l'intégrale de la fonction.





$\frac{30+31+35+37+40}{5}$

c. Propriétés de l'intégrale

- Existence d'une intégrale sur un intervalle

Toute fonction continue sur [a ; b] admet une intégrale sur cet intervalle.

- Permutation des bornes

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

- Relation de Chasles

Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Pour tout nombre a, b et c de I, on a :

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Linéarité

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I. Pour tous nombres réels a et b de I, on a :

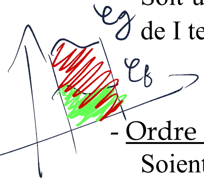
$\int 2x^2 + 4x = 2\int x^2 + 4\int x$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

- Positivité

Soit une fonction f continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \leq b$. Si $f \geq 0$ sur [a ; b], alors :

$$\int_a^b f(x) \geq 0$$



- Ordre d'intégration

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \leq b$. Si f≤g sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$f \leq g$

$\int f \leq \int g$

- Inégalité de la moyenne

Sur un intervalle [a ;b], si l'on a $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

- Valeur moyenne

  Sur un intervalle [a ;b] :

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

- Primitive et intégrale

  Une intégrale est définie par la relation :

$$A=\int_a^b f(t)dt=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$$

2. Primitives usuelles et opérations

a. Primitive des fonctions de références

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x)=a$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}\quad n\neq 1$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$

b. Opération des primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f=u+v$	$F=U+V$	$D_u\cap D_v$
$f=u'.u^n$	$F=\frac{u^{n+1}}{n+1}$	D_u
$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F=2\sqrt{u}$	$D_u\cap u>0$
$f=\frac{u'}{u^2}$	$F=-\frac{1}{u}$	$D_u\cap u\neq 0$
$f=u'.e^u$	$F=e^u$	D_u
$f=\frac{u'}{u}$	$F=\ln\lvert u\rvert$	$D_u\cap u\neq 0$
$f=u'\sin u$	$F=-\cos u$	D_u
$f=u'\cos u$	$F=\sin u$	D_u

3. Intégration par partie

$$\int_a^b uv'=[uv]_a^b-\int_a^b u'v$$

$$(u\times v)'=u'v+v'u.$$

$$(u\times v)'-u'v=u\times v'$$

$$\int (u\times v)'-u'v=\int u\times v'$$

$$\int_a^b (u\times v)'-\int_a^b u'v=\int_a^b u\times v'$$

$$[u\times v]_a^b-\int_a^b u'v=\int_a^b uv'$$

$$\int_2^3 (x^2+2)e^x\,dx$$

$$=[(x^2+2)e^x]_2^3-2\int_2^3 xe^x\,dx$$

$$=[(x^2+2)e^x]_2^3-2\,(3e^3-2e^2)$$

Calcul intégral – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

1. **(a)** Etudier pour tout $x \in]0;+\infty[$, les variation de (I_n). $I_{n+1} - I_n$
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$
   Conclure sur la nature de la suite
2. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{n+1} < I_n < \frac{1}{n}$
3. En déduire la limite de I_n.

Exercice 2 corrigé disponible

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{\pi/4} x^n \sin(2x)\,dx$. On ne cherchera pas à calculer I_n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

2. Quelle est la limite de I_n ?

Exercice 3 corrigé disponible

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} 4e^t\,dt$ **(b)** $\int_0^1 t e^{t^2-1}\,dt$ **(c)** $\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1}\,dt$

Exercice 4 corrigé disponible

1. Déterminer a, b et c tel que pour tout x ≠ -2 :

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2. En déduire $I = \int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)^2}\,dx$

Exercice 5 corrigé disponible

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^4 (t-3)\,dt$ **(b)** $\int_4^{-1} (t^2-4t)\,dt$ **(c)** $\int_1^2 \left(t^2 - \frac{1}{t}\right)dt$

Exercice 6 corrigé disponible

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right)dt$ **(b)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)\,dt$ **(c)** $\int_0^{\pi} (\sin(2t))\,dt$

Exercice 7 corrigé disponible

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 e^{1-2x}\,dx$

2. $J = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

3. $K = \int_0^1 \cos(x) e^{\sin(x)}\,dx$

4. $L = \int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4}\,dx$

5. $M = \int_0^1 5^x\,dx$

6. $N = \int_0^{1/2} \frac{3x}{1-x^2}\,dx$

7. $O = \int_0^1 x(x^2+2)\,dx$

8. $P = \int_{-1}^2 3^x\,dx$

Exercice 8 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. Vérifier que pour tout x, $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale, $J = \int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 9 corrigé disponible

1. **(a)** Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x(\ln x-1)$.
Calculer $f'(x)$ pour tout x >0.

(b) En déduire $\int_1^e \ln x dx$.

2. Montrer que l'on a $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}dt=\ln\sqrt{\frac{e^2+1}{2}}$

Exercice 10 corrigé disponible

On se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'intégrale $L=\int_0^1 f(x)dx$ où f est la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=\frac{e^{-x}}{2-x}$

1. Démontrer que pour tout x ∈ [0 ; 1] :

$$\frac{1}{e}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$$

2. Soient J et K les intégrales définies par :

$$J=\int_0^1 (2+x)e^{-x}dx \quad ; \quad K=\int_0^1 x^2 f(x)dx$$

(a) Calculer J et montrer que $J=3-4e^{-1}$.

(b) Utiliser l'encadrement de la question *1.* pour démontrer que :

$$\frac{1}{3e}\leq K\leq\frac{1}{6}$$

(c) Démontrer que $J+K=4L$.

(d) En déduire un encadrement de L, puis donner une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

Exercice 11

On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n=\int_0^1 t^n\cos t dt$$

1. **(a)** Montrer que la suite (x_n) est à terme positifs.

(b) Montrer que tout $n\in\mathbb{N}$ et pour $t\in[0\,;1]$ on $t^{n+1}\cos t\leq t^n\cos t$.

(c) En déduire les variations de la suite (x_n).

(d) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. **(a)** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $x_n\leq\frac{1}{n+1}$.

(b) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n=\int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n\geq 0$.

2. **(a)** Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n e^t\leq e\times(1-t)^n$$

(b) En déduire que pour tout n ∈ℕ, $u_n\leq\frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 13

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I=\int_1^6 \frac{1}{(x-3)^3}\,dx \qquad J=\int_{-1}^{2} \frac{1}{3x+5}\,dx \qquad K=\int_{-1}^{1} xe^{3x^2-1}\,dx$$

Exercice 14

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3}\,dx$$

Exercice 15 corrigé disponible

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

1.a. Montrer que $u_0+u_1=1$

1.b. Montrer que $u_1=1+\ln\frac{2}{1+e}$ et en déduire u_0

2.a. Montrer pour tout entier naturel que $u_n\geq 0$

2.b. Montrer pour tout entier naturel non nul que $u_n+u_{n+1}=\frac{1-e^{-n}}{n}$

2.c. En déduire que pour tout entier naturel non nul $u_n\leq\frac{1-e^{-n}}{n}$

3. Prouver que (u_n) converge vers une limite à déterminer

Exercice 16 corrigé disponible

Calculer les intégales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1) $I=\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$

2) $I=\int_1^{e^2} \ln t\,\mathrm{d}t$

3) $I=\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,\mathrm{d}x$

4) $I=\int_0^1 (x+2)e^x\,\mathrm{d}x$

5) $I=\int_1^2 (t-2)e^{2t}\,\mathrm{d}t$

6) $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 17

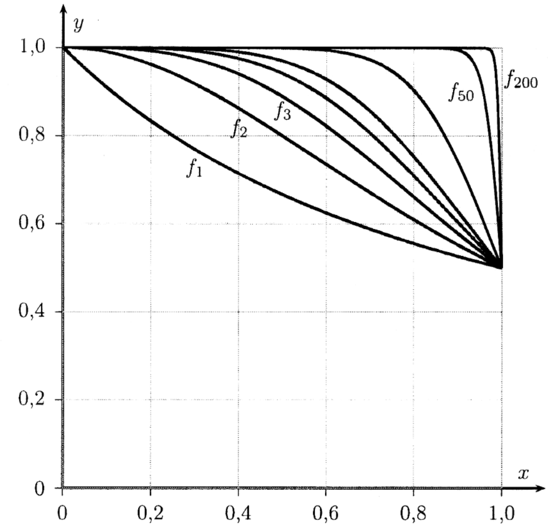
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on définit le nombre I_n par $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$

Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

1. a) En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de la suite (I_n).
   b) Démontrer cette conjecture.
2. Calculer la valeur exacte de I_1.
3. a) Démontrer que, pour tout réel $x\in[0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $\frac{1}{1+x^n}\leqslant 1$
   b) En déduire que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $I_n\leqslant 1$.
4. Démontrer que, pour tout réel $x\in[0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a : $1-x^n\leqslant\frac{1}{1+x^n}$.
5. Calculer l'intégrale $\int_0^1(1-x^n)\,\mathrm{d}x$.
6. À l'aide des questions précédentes, encadrer I_n pour tout entier naturel $n\geq 1$, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.



Exercice 18

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

1) a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b) Étudier les variations de la suite (x_n).

c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite, (x_n) ?

2) a) Démontrer que, pour tour entier naturel n non nul :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite (x_n).

3) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$

Exercice 19

Étude de la suite (u_n) définie par pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^n f(x)\,dx$

On ne cherchera pas à calculer explicitement u_n.

1. Donner une interprétation géométrique de u_n.

2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{e^x - x}$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = n + \int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx.$$

c. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 20

Étude de la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n$

On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = \int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx$.

On se propose d'étudier la convergence de la suite (v_n).

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

c. En effectuant une intégration par parties, exprimer $\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$ en fonction de n.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 2$.

3. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

1. **(a)** Etudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$

(b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

Soient les fonctions g et h définies sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et

$h(x) = \ln x + 1$.

Soit C_g et C_h leurs courbes représentatives.

2. **(a)** Représenter C_g et C_h. Quelles sont les coordonnées de I, intersection de C_h avec l'axe des abscisses ?

(b) On note A l'aire du domaine délimité par C_g et C_h et les droites d'équation $x = e^{-1}$ et $x = 1$. Déterminer A.

Exercice 22

On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{4x-x^2}{(x-2)^2}$ et $g : x \mapsto 4x - x^2$ sur $]2; +\infty[$.

1) Etudier les positions relatives des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2) Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan compris entre les deux courbes et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.

Exercice 23

A l'aide d'une double intégration par parties, calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{t} \cos(t) dt \qquad B = \int_{0}^{\pi} e^{-t} \sin(t) dt \qquad C = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t} \cos(6t) dt$$

Exercice 24

On désigne par n un entier relatif différent de –1.

1. Calculer l'intégrale : $I_n = \int_1^e t^n \ln t \, dt$.
2. En déduire le calcul de l'intégrale : $J_n = \int_1^e t^n (\ln t)^2 \, dt$.

Exercice 25

On désigne par n un entier naturel, on pose : $\int_0^n t^2 e^{-t} \, dt$

1. Calculer I_n en fonction de n.
2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} I_n$