Formules de duplication :

. $\cos(2\alpha) = ?$

. $\sin(2\alpha) = ?$

. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

. Calculer (pour $\alpha \in \mathbb{R}$), $\sin(3\alpha)$ en fonction de $\sin(\alpha)$.

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b). \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a). \end{cases}$$

$\hookrightarrow \cos(2\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha)$.

$$= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

On utilise : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

donc : $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$.

Donc $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha))$.

$$= \cos^2(\alpha) - 1 + \cos^2(\alpha).$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1.}$$ (Résultat n°1).

On utilise $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

donc : $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$.

Donc : $\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$.

$$\boxed{\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)}$$ (Résultat n°2)

$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \, ?$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1.$$

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} \rightarrow \text{donc } \frac{\pi}{4} = 2\frac{\pi}{8}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1.$$

Résultat n° 1 donne :

$$\underbrace{\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1.$$

$$\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = +\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}$$

Formule de duplication :

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha).}$$

Déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

$$\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{} = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cancel{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{\cancel{2}}.$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}} = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

- $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = ?$ $\longrightarrow$ exprimer en fct de $\frac{\pi}{8}$.
- $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = ?$ (en utilisant $\frac{\pi}{2}$).

$$\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

$$\frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}.$$

Donc : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= 0 \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Donc : $\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}}}$.

- $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$

$$= \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

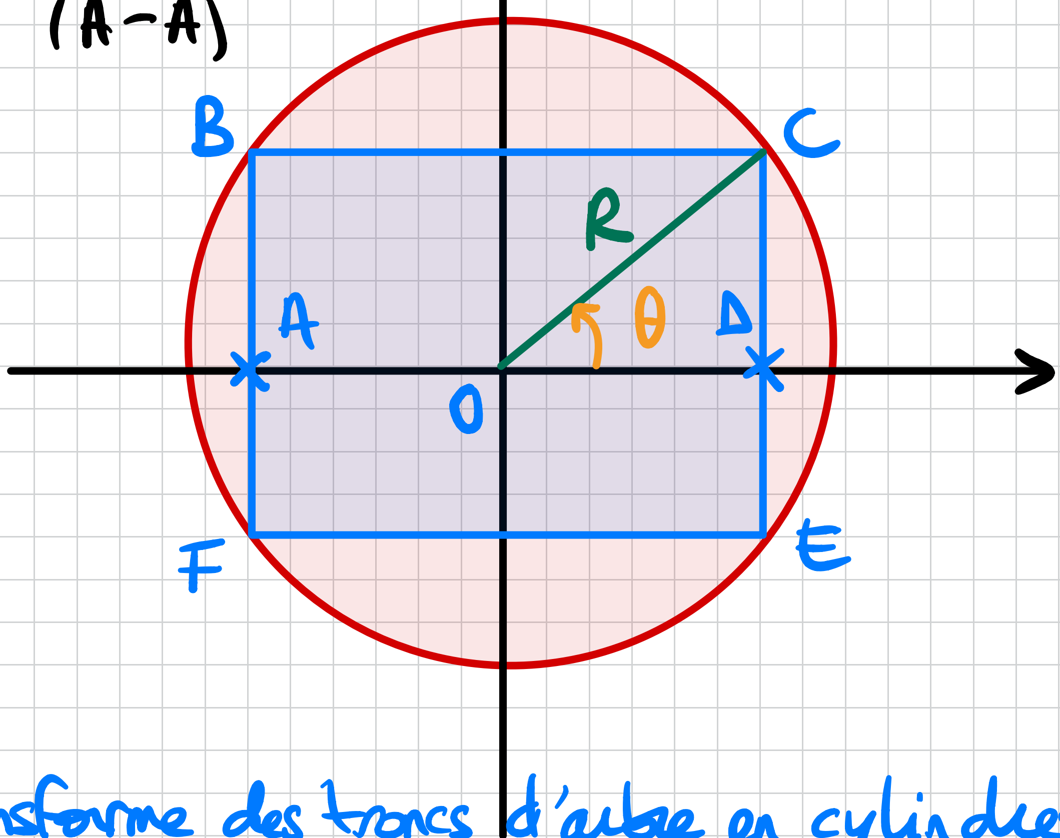
$$= 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \times 0$$

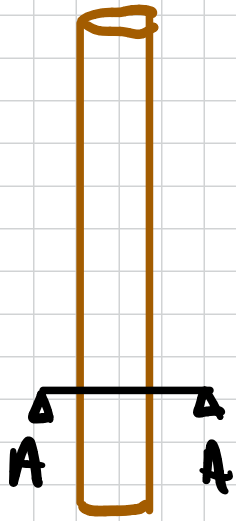
$$= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}$$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b). \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a). \end{cases}$$

Coupe transversale du tronc :
(A-A)



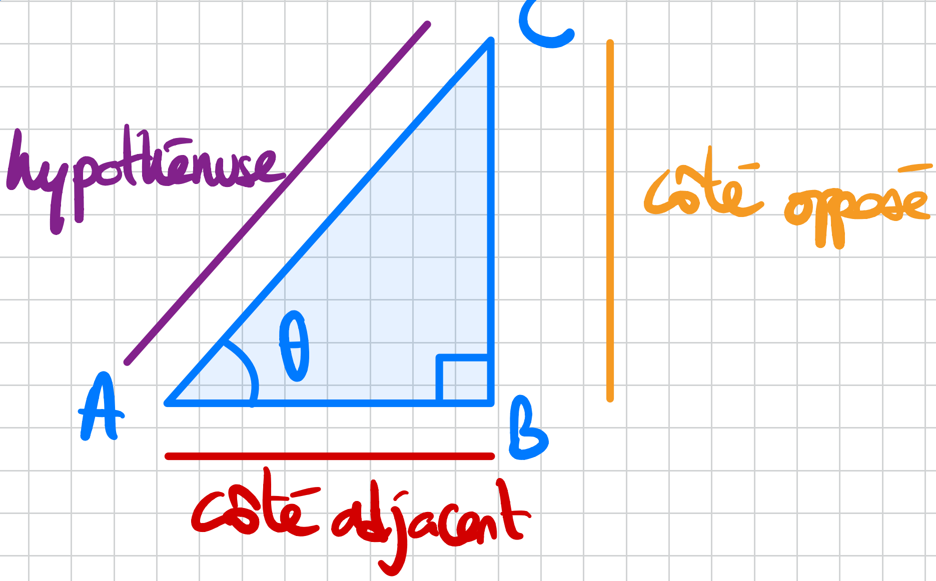


On transforme des troncs d'arbre en cylindres pour faire des poutres.

1) Donner l'aire du rectangle ABCD et BCEF en fonction de θ.

2) Pour quelle valeur de θ, l'aire de BCEF est maximale ?

3) Interpréter.



$\underbrace{\text{CAH}}$ – SOH – TOA.

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \dfrac{AB}{AC} \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} = \dfrac{BC}{AC} \\[2ex] \tan(\theta) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \dfrac{BC}{AC} \end{cases}$$

$$\underbrace{CD}_{\text{opposé}} = \sin(\theta) \times \text{hypothénuse} = \sin(\theta) \times R.$$

$$AD = 2 \times \underbrace{OD}_{\text{adjacent}} = 2 \times \cos(\theta) \times \text{hypothénuse} = 2R\cos(\theta).$$

$$\text{Aire}_{ABCD} = \sin(\theta) \times R \times 2 \times R \times \cos(\theta)$$

$$\boxed{\text{Aire}_{ABCD} = 2R^2 \sin(\theta)\cos(\theta).}$$

$$\boxed{\text{Aire}_{BCEF} = 2 \times \text{Aire}_{ABCD} = 4R^2 \sin(\theta)\cos(\theta).}$$

Or : $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$.

<u>Rappel</u> : $\sin(2\theta) = \sin(\theta+\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)$.

$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Aire}_{ABCD} &= R^2\sin(2\theta) \\ \text{Aire}_{BCEF} &= 2R^2\sin(2\theta). \end{aligned}}$$

2) $\sin(x)' = \cos(x)$.

Ici : $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Donc : $2\theta \in [0; \pi]$.

$\text{Aire}_{BCEF} = 2R^2\sin(2\theta)$, R est <u>constant</u>.

$\sin(2\theta)' = 2\cos(2\theta)$.

On pose : $f(\theta) = 2R^2\sin(2\theta)$.

$f'(\theta) = 2R^2 \times 2\cos(2\theta) = 4R^2\cos(2\theta)$.

On cherche $\max(f)$:

$f'(\theta) = 0 \iff 4R^2\cos(2\theta) = 0$

$\iff \cos(2\theta) = 0 \rightarrow \cos(2\theta) = \cos(\frac{\pi}{2})$

$\iff 2\theta = \pi/2$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

$\mathcal{A}ire_{BCEF}$ est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ $(45°)$.

3) <u>Interprétation</u> : si $\theta = \frac{\pi}{4}$, BCEF est un carré

Donc la section de la poutre en bois est maximale pour un carré.