Seconde GT - Maths - Dimanche 07 avril 2024

Triangle de Pascal :

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1
1				1
1				1

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = 1a^2b^0+2a^1b^1+1a^0b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3b^0+3a^2b^1+3a^1b^2+1a^0b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4b^0+4a^3b^1+6a^2b^2+4a^1b^3+1a^0b^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

$(a+b)^4 = (a+b)^2 \times (a+b)^2$

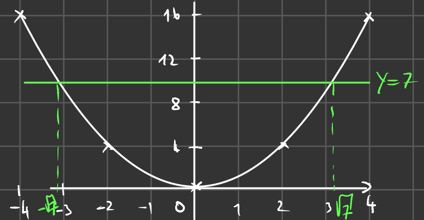
$= (a^2+2ab+b^2)\times(a^2+2ab+b^2)$

$= a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^3b+4a^2b^2+2ab^3+a^2b^2+2ab^3+b^4$

$= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Exercice n°1 : Soit $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$.

1)



2) $f(x)=5 \Leftrightarrow x^2=5$.

$x=\sqrt5$ ou $x=-\sqrt5$.

$f(x)=-10 \Leftrightarrow x^2=-10<0$

$S=\emptyset$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

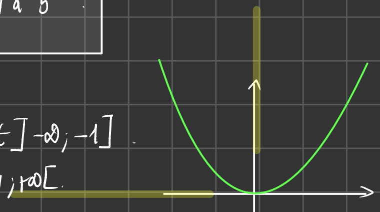
$f(x)\geq -1 \Leftrightarrow x^2\geq -1 \Leftrightarrow S=\mathbb{R}$.

$f(x)<0 \Leftrightarrow x^2<0 \Leftrightarrow S=\emptyset$

$f(x)<7 \Leftrightarrow x^2<7 \Leftrightarrow x\in\,]-\sqrt7;\sqrt7[$

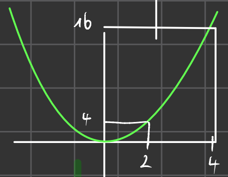
3) $x\in\,]-\infty;-1]$.

$x^2\in[1;+\infty[$



$x\in\,]2;4]$

$x^2\in\,]4;16]$



$x\in\,]-2;3]$

$x^2\in[0;9]$

4) a) $f(3)=9$: 3 est un antécédent de 9 par f.

b) $f(3)=9$ 3 est une solution de l'équation $f(x)=9$.

c) $f(3)=9$ 9 est l'image de 3 par la fonction f.

5) Soit (d) la droite passant par $A(1;1)$ et $B(-2;4)$.

(d) : $y=ax+b$.

$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-1}{-2-1}=\frac{3}{-3}=-1$.

(d) : $y=-x+b$.

Or $A\in(d)$:

$y_A=-x_A+b$.

$1=-1\times1+b$.

$b=2$.

$$\boxed{(d) : y=-x+2}$$

6) $f(x)=h(x) \Leftrightarrow x^2=-x+2$.

$\Leftrightarrow x^2+x = 2$.

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+2\times x\times\frac12+\left(\frac12\right)^2}-\left(\frac12\right)^2 = 2$.

$\Leftrightarrow \left(x+\frac12\right)^2 = 2+\frac14=\frac94$.

$\Leftrightarrow \left(x+\frac12\right)^2 = \frac94$.

$\Leftrightarrow x+\frac12=\sqrt{\frac94}$ ou $x+\frac12=-\sqrt{\frac94}$.

$\Leftrightarrow x+\frac12=\frac32$ ou $x+\frac12=-\frac32$.

$\Leftrightarrow x=\frac32-\frac12=\boxed{1}$ ou $x=-\frac32-\frac12=\boxed{-2}$

$x^2+3x-4=0$. $a^2+2ab+b^2$

$\underbrace{x^2+2\times x\times\frac32+\left(\frac32\right)^2}-\left(\frac32\right)^2-4=0$.

$\left(x+\frac32\right)^2=\frac94+4=\frac{25}{4}$.

$x+\frac32=\frac52$ ou $x+\frac32=\frac{-5}{2}$.

$x^2+8x-9=0$.

$x^2+2\times x\times4+4^2-4^2=9$.

$(x+4)^2=25$.

$x+4=\sqrt{25}$ ou $x+4=-\sqrt{25}$.

$x+4=5$ ou $x+4=-5$.

$x=1$ ou $x=-9$.

Exercice 2 :

1) $f(x)=x^2+4x-5$.

$f(0)=0^2+4\times0-5=-5$.

$f(-2)=(-2)^2+4\times(-2)-5$.

$=4-8-5=4-13=-9$.

2. $x^2+4x-\cancel{5}=-\cancel{5}$) $+5$

$\Leftrightarrow x^2+4x=0$.

$\Leftrightarrow x(x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x+4=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-4$.

3 $(x+2)^2-9 = x^2+2\times x\times2+2^2-9$

$=x^2+4x+4-9$

$=x^2+4x-5=f(x)$.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$f(x)=(x+2)^2-9=(x+2)^2-3^2$

$=(x+2+3)(x+2-3)$

$=(x+5)(x-1)$.

$f(x)=x^2+4x-5$ (développée)

$f(x)=(x+2)^2-9$ (canonique)

$f(x)=(x+5)(x-1)$ (factorisée)

4) Soit $x\in\mathbb{R}$, résoudre $f(x)=0$.

$(x+5)(x-1)=0$

$x+5=0$ ou $x-1=0$

$x=-5$ ou $x=1$.

5) $f(x_2)-f(x_1)=[(x_2+2)^2-9]-[(x_1+2)^2-9]$

$=(x_2+2)^2-(x_1+2)^2=(x_2+2+x_1+2)(x_2+\cancel{2}-x_1-\cancel{2})$

$=(x_2-x_1)(x_2+x_1+4)$.

Fonctions de référence – Fiche de cours

1. Fonction carré

a. Définition

La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$

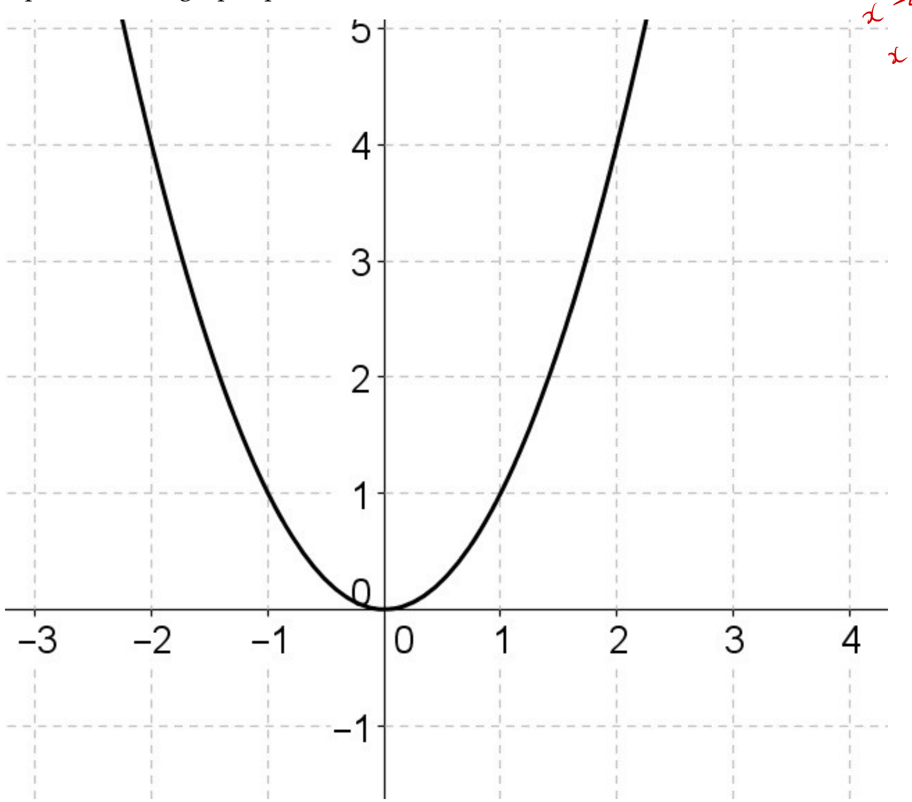
$x^4=4.$
$(x^2)^2=4.$
$x^2=\sqrt{4}$ ou $x^2=-\sqrt{4}.$ X
$x^2=2.$
$x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{2}.$

Propriétés :

La courbe représentative d'une fonction carrée s'appelle une parabole
La fonction carrée est paire
La fonction carré est positive

$(x-2)^2=4.$
$x-2=\sqrt{4}$ ou $x-2=-\sqrt{4}.$
$x-2=2$; $x-2=-2.$
$x=4$; $x=0$

Représentation graphique :



b. Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

c. Résolution d'équation et d'inéquation

$x^2=-2.$

- **Equations**

Résolution de $x^2=k$

- si $k<0$ alors $S=\varnothing$
- si $k=0$ alors $S=\{0\}$
- si $k>0$ alors $S=\{-\sqrt{k};\sqrt{k}\}$

$x^2=3$
$x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$
$x^2=4$
$x=2$ ou $x=-2.$

- **Inéquations**

Résolution de $x^2<k$

- si k<0 $S=\varnothing$
- si k>0 $S=]-\sqrt{k};\sqrt{k}[$

Résolution de $x^2>k$

- si k<0 $S=\mathbb{R}$
- si k>0 $S=]-\infty;-\sqrt{k}[\cup]\sqrt{k};+\infty[$

d. Identités remarquables

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

$\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$.
$\sqrt{81} = 9$ car $9^2 = 81$.

$\sqrt{a} = b \quad b^2 = a$

Supposons $a < 0$.
$\sqrt{a} = b \quad b^2 = a < 0$

$\sqrt{4} = -2$? $\quad 2$
$(-2)^2 = 4$.

2. Fonction racine carré

a. Définition

La fonction racine carrée est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$

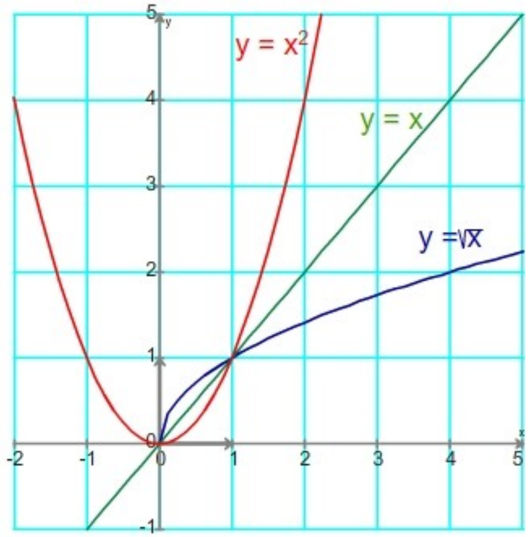
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{4} = -2$.
$f(4) = 2$
$f(4) = -2$.

Propriétés :

La fonction racine carrée est la réciproque de la fonction carrée
La fonction racine carrée n'a pas d'élément de parité
La fonction racine carré est positive

$2 \longrightarrow 4$
$4 \longrightarrow 2$.

Représentation graphique :



b. Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	↗

c. Propriétés des racines carrées

$\sqrt{a^2} \neq a \qquad \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

- **Propriété**

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2}=|a|$$

$\sqrt{2\times 3} = \sqrt{2}\times\sqrt{3}$.

- **Produit**

$$\forall a \geq 0 \quad \forall b \geq 0 \quad \sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

- **Quotient**

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$\sqrt{2+3} \leq \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

- **Inégalité triangulaire**

Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

3. Fonction cube

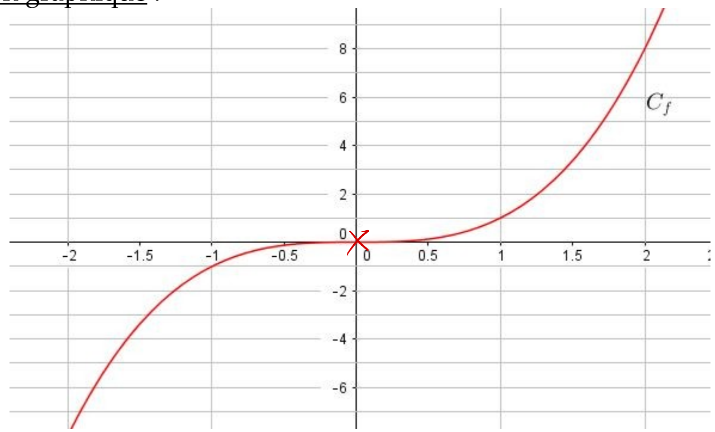
a. Définition

La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$

Propriétés :

La fonction cube est impaire
La fonction cube a pour réciproque la fonction racine cubique $\sqrt[3]{x}$

Représentation graphique :



b. Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3		↗	

c. Identités remarquables

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

4. Fonction inverse

a. Définition

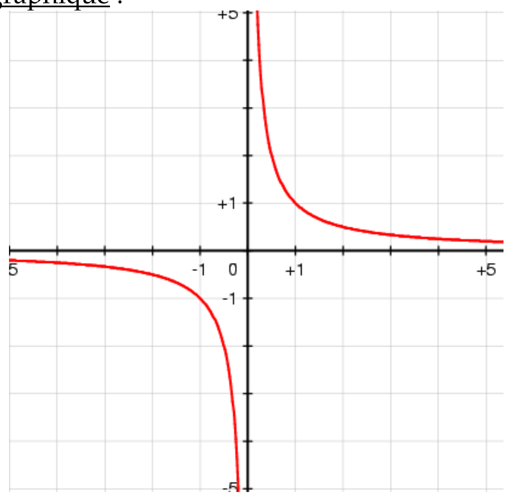
La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Propriétés :

La courbe représentative d'une fonction inverse s'appelle une hyperbole

La fonction inverse est impaire

Représentation graphique :



Hyperbole

b. Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

c. Fonctions homographiques

Une fonction homographique est un cas particulier des fonctions rationnelles

Une fonction homographique est définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Hyperboles

5. Autres propriétés

- si $0 \leq x \leq 1$ alors $x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$
- si $x \geq 1$ alors $1 \leq x \leq x^2 \leq x^3$

Fonctions de référence – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

Soit *f* la fonction carrée définie pour tout réel x par $f(x)=x^2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Représenter C_f pour $x\in[-4;4]$
2. Résoudre graphiquement puis par le calcul les équations et inéquations suivantes :
   - $f(x)=5$ - $f(x)=-10$ - $f(x)=0$
   - $f(x)\geq-1$ - $f(x)<0$ - $f(x)<7$
3. Donner un encadrement de f(x) dans les cas suivants :
   - $x\in]-\infty\ ;-1\ ]$ - $x\in]2\ ;\ 4\ ]$ - $x\in]-2\ ;\ 3\ ]$
4. On donne $f(3)=9$; écrire une phase équivalente avec le terme suivant :
   a. antécédent b. équation c. image
5. Déterminer l'équation de la droite *d* passant par les points $A(1;1)$ et $B(-2;4)$; on notera h(x) la fonction associée
6. Résoudre graphiquement $f(x)=h(x)$
7. Démontrer que $f(x)-h(x)=(x-1)(x+2)$
8. En utilisant la question précédente étudier la position relative de C_f et *d* selon les valeurs de x.

Exercice 2 corrigé disponible

On appelle *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+4x-5$

1. Calculer l'image de 0 et de -2 par *f.*
2. Déterminer le ou les antécédents éventuels de -5.
3. Montrer que l'on a $f(x)=(x+2)^2-9$; en déduire une factorisation de f(x).
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.
5. Montrer que $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1+4)$. En déduire que *f* est croissante sur $[-2;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;-2]$. Construire le tableau de variation et précisez le minimum.

Exercice 3 corrigé disponible

Soit x un nombre réel

1. L'affirmation si $x^2\geq9$ alors $x\geq3$ est-elle vraie ?
2. Ecrire une proposition équivalente à $x^2\geq9$

Exercice 4 corrigé disponible

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-3)^2=25$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(1-2x)^2\geq9$

Exercice 5 corrigé disponible

1. Résoudre les équations suivantes :
   a. $x^2-4-(x+2)(3x-1)=0$
   b. $(x-2)^2-(3x-1)^2=0$
   c. $x^2-16=(x-4)^2(x+5)$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $x^2<5x$
   b. $x^2>49$

Exercice 6 corrigé disponible

Pour chaque cas, donner un encadrement de x^2 :

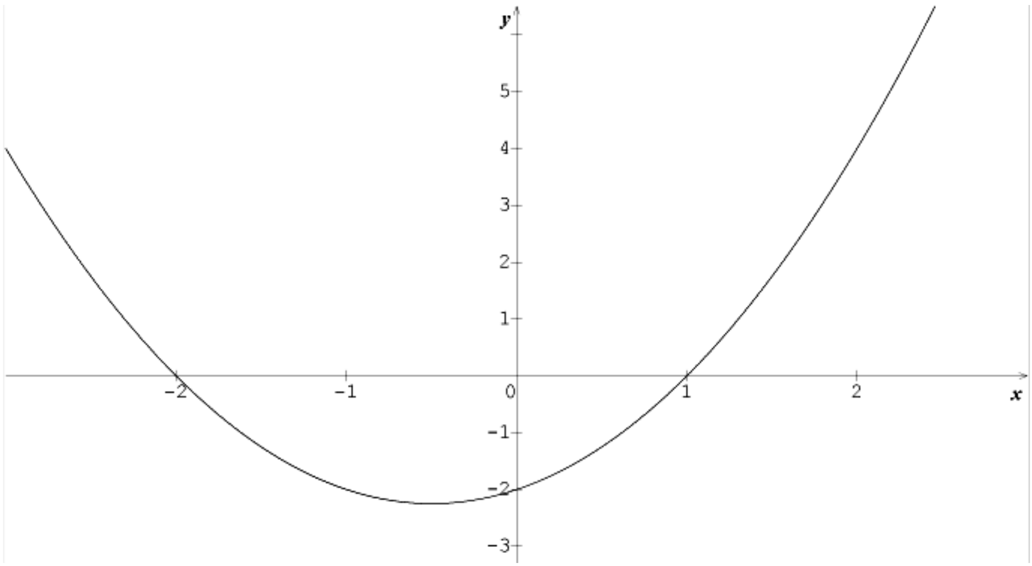
1. $-2<x\leq7$
2. $x>3$
3. $-6\leq x<3$
4. $x<-2$

Exercice 7 **corrigé disponible**

Soit *f* la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f(x)=x^2+x-2$

On donne sa représentation graphique dans un repère orthogonal

1. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   a. $f(x)=0$ b. $f(x)=-2$ c. $f(x)\leq 0$
2. Tracer dans le même repère la droite représentant la fonction g définie sur $[-2;1]$ par $g(x)=-x+1$.
   En déduire les solutions de l'équation : $f(x)=-x+1$
3. Déterminer par le calcul les antécédents de -2 par f(x)
4. a. Vérifier que l'on a pour tout x $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$
   b. En déduire la résolution par le calcul de l'équation $f(x)=0$
   c. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)\leq 0$



Exercice 8 **corrigé disponible**

Soit la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$

1. Quel est le domaine de définition de $f(x)$?
2. Démontrer le sens de variation de la fonction racine carrée.
3. Comparer $f(3)$ et $f(\pi)$; justifier

Soit les fonctions $h(x)=\sqrt{(x+1)}$ $\quad k(x)=\sqrt{(x)}+1$ $\quad \forall x\in[0;+\infty[$

4. Comparer $h(x)$ et $k(x)$; justifier.
5. Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
6. Indiquer la (les) réponse(s) correcte(s) en justifiant :
   a. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq 1$
   b. $\sqrt{3}-\sqrt{2}\leq 1$
   c. $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq 1$
7. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{N}$ b étant le plus petit possible :
   $A=-5\sqrt{28}+5\sqrt{63}-\sqrt{112}$ $\qquad B=\sqrt{160}\times\sqrt{40}\times\sqrt{90}$
8. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$ $c\in\mathbb{N}$ c étant le plus petit possible :
   $A=(4\sqrt{5}-3\sqrt{6})^2$ $\qquad B=(2\sqrt{10}+4\sqrt{6})^2$
9. Ecrire sans racine carrée au dénominateur :
   $A=\dfrac{2+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$
10. Calculer ou résoudre en justifiant :
    a. $\sqrt{\left(\pi-\dfrac{7}{2}\right)^2}$ $\qquad$ b. $\sqrt{x-5}=3$ $\qquad$ c. $\sqrt{(x-5)^2}=3$

Exercice 9 **corrigé disponible**

1. Montrer que $\sqrt{2}+1$ est l'inverse de $\sqrt{2}-1$
2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ $b\in\mathbb{Z}$ $c\in\mathbb{N}$ c étant le plus petit possible :
   - $\sqrt{28}\times\sqrt{63}\times\sqrt{12}$
   - $(5\sqrt{3}-7\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{3})$
   - $(4\sqrt{7}+2)\cdot(3-\sqrt{7})-10\sqrt{7}$
   - $\dfrac{(2\sqrt{7}-3\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$
   - $(\sqrt{3}+5)^2+(\sqrt{3}-5)^2$
3. Le nombre d'or est défini par $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

   Ce nombre est solution de l'équation $x^2=x+1$

   Calculer ϕ^2 et $\phi+1$. Conclure
4. Résoudre :
   a. $\sqrt{(x-4)^2}=-1$ $\qquad$ b. $\sqrt{(3-x)^2}=\sqrt{64}$ $\qquad$ c. $\sqrt{2x-1}=x$

Exercice 10 **corrigé disponible**

1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b le plus petit possible :
   $A=-5\sqrt{12}+2\sqrt{48}+2\sqrt{27}$ $\qquad B=\sqrt{112}\times\sqrt{28}\times\sqrt{63}$
2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers :
   $C=(2\sqrt{7}+3\sqrt{10})^2$ $\qquad D=(\sqrt{5}-2\sqrt{11})^2$
3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier :
   $E=(4-3\sqrt{5})(4+3\sqrt{5})$ $\qquad F=\dfrac{16\sqrt{18}}{6\sqrt{32}}$

Exercice 11 **corrigé disponible**

Soit la fonction définie par $f(x)=x^3$

1. Quel est le domaine de définition de $f(x)$?

2. Etude des variations

On suppose que $0 \leq a < b$:

a. Quel est le signe de $a-b$?

b. Déterminer $f(a)$ et $f(b)$ et les comparer.

On utilise l'identité remarquable : $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

c. Quel est alors le sens de variation de la fonction cubique sur $[0;+\infty[$

On suppose que $a < b \leq 0$:

d. Quel est le signe de $a-b$?

e. Déterminer $f(a)$ et $f(b)$ et les comparer.

f. Quel est alors le sens de variation de la fonction cubique sur $]-\infty;0]$.

Cas général

g. Dresser le tableau de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}$.

3. Comparer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\sqrt{2})$; justifier

Soit la fonction $g(x)=3x^2-3x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. Comparer $f(x)$ et $g(x)$; que peut-on en déduire pour la position relative des courbes représentatives de $f(x)$ et $g(x)$?

Exercice 12 **corrigé disponible**

1. Représenter dans un repère orthonormal du plan la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$ pour $x\in[-5;5]$

2. Compléter :

- si $x<-1$ alors $\ldots<\frac{1}{x}<\ldots$
- si $1\leq x\leq 2$ alors $\ldots<\frac{1}{x}<\ldots$

3. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$:

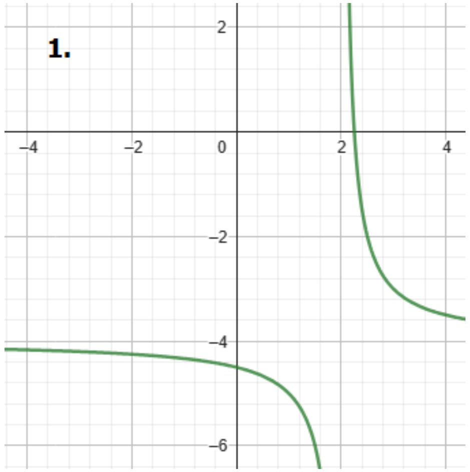
- $\frac{1}{x}=-3$
- $\frac{1}{x}\geq 2$
- $\frac{1}{x}\leq 1$

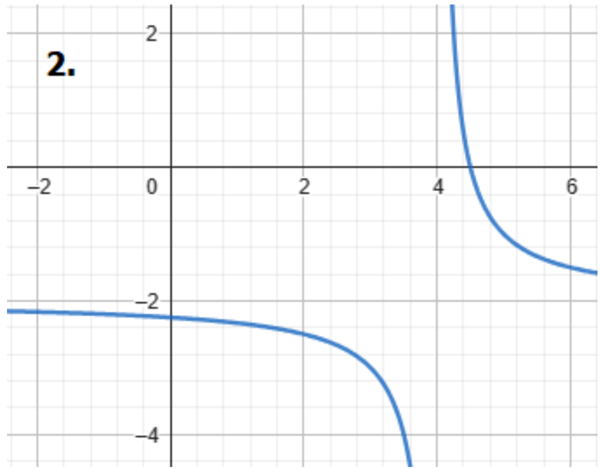
4. Retrouver graphiquement les résultats de la question 3.

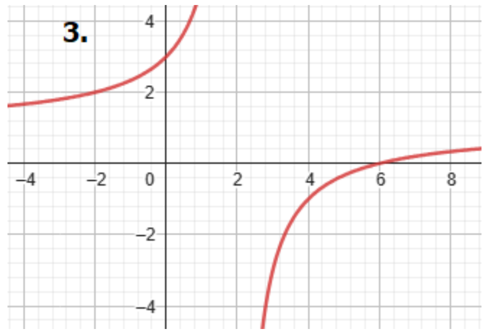
Exercice 13 **corrigé disponible**

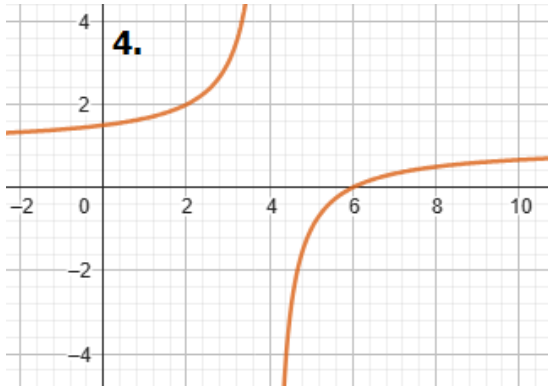
Associer à chaque fonction sa représentation graphique :

- $f(x)=\frac{-2}{(x-4)}+1$
- $g(x)=\frac{1}{(x-4)}-2$
- $h(x)=\frac{-4}{(x-2)}+1$
- $i(x)=\frac{1}{(x-2)}-4$









Exercice 14 corrigé disponible

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq -2$ par $f(x) = 1 - \frac{6}{x+2}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
2. a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$
   b) On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$. Donner le tableau de variations de la fonction f.
3. Soit g la fonction affine telle que $g(-1) = -3$ et $g(3) = 1$.
   Déterminer l'expression de $g(x)$ en fonction de x.
4. a) Montrer pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) - g(x) = \frac{x - x^2}{x+2}$.
   b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 15 corrigé disponible

1. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} > 4$
2. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} \geq -3$
3. Résoudre l'inéquation $1 \leq x^3 < 27$
4. Résoudre l'inéquation $x^3 > 8$

Exercice 16 corrigé disponible

Un rectangle a une aire égale à $60m^2$. On note x la largeur et y la longueur, en m de ce rectangle.

1. Exprimer la longueur y en fonction de x
2. Déterminer la largeur x lorsque $y = 24$
3. On souhaite que la longueur de ce rectangle soit telle que $y \leq 10$
   Montrer que sa largeur doit être telle que $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{6}$
   Déterminer les valeurs possibles de x

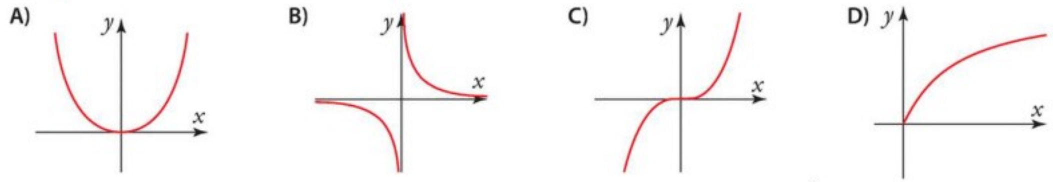
Exercice 17 corrigé disponible

Calculer l'image de chaque nombre par la fonction cube

1. 3
2. -1
3. $-\frac{2}{3}$
4. $\frac{5}{2}$

Exercice 18 corrigé disponible

Retrouver à quelle fonction, à quel ensemble de définition et à quelle expression littérale correspond chacune des courbes représentatives des fonctions de référence suivantes.



1. fonction inverse 2. fonction cube 3. fonction racine carrée 4. fonction carré	a) définie sur $[\,0\,;\,+\infty[$ b) définie sur $\mathbb{R}$ c) définie sur $\mathbb{R}^*$ d) définie sur $\mathbb{R}$	I) $f(x) = \frac{1}{x}$ II) $h(x) = x^3$ III) $g(x) = \sqrt{x}$ IV) $i(x) = x^2$

A) ________________ B) ______________ C) ______________ D) ____________