plus de bonnes notes Mercredi 24 avril 2024 - TG Spé maths -

$F_1(x) = (x-1)e^x$ dérivable sur $[0;1]$ comme produit de fonctions dérivables

$u(x) = x-1$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$

$F_1'(x) = (x-1)e^x + e^x \times 1$

$= e^x(x-1+1)$

$F_1'(x) = xe^x = f_1(x)$

Ccl : F_1 est bien une primitive de f_1

b. $I_1 = \int_0^1 x^1 e^x \, dx = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = (1-1)e - (0-1)e^0$

$= 1$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ non nul,

$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$

$u(x) = x^{n+1}$ $\quad v(x) = e^x$

$u'(x) = (n+1)x^n$ $\quad v'(x) = e^x$

$I_{n+1} = \left[u(x) \times v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x) \times v(x) \, dx$

$= \left[x^{n+1} \times e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times e^x \, dx$

$= 1^{n+1} \times e^1 - (0^{n+1} \times e^0) - (n+1)\int_0^1 x^n \times e^x \, dx$

$= e - (n+1) I_n$

$\int_1^2 x^n \, dx$

$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$

$\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$

$\boxed{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

3) Nous venons de démontrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\begin{cases} I_{n+1} = e - (n+1) I_n \\ I_1 = 1 \end{cases}$

$I_2 = e - (1+1) \times I_1$

$= e - 2$

4) Mystère 5 renvoie, d'après les quest° précédentes, à la liste ordonnée des 5 premiers termes de (I_n).

1) a) (I_n) représente l'aire délimitée par l'axe des abscisses, $x = 0$ & la droite d'équation et celle d'équation $x = 1$, et la courbe C_n.

b) On peut donc en conjecturer que la limite de la suite (I_n) est 0.

2) $0 \le x \le 1$

$e^0 \le e^x \le e^1$

$1 \le e^x \le e$

$x^n \le e^x \times x^n \le e x^n$

$\int_0^1 x^n \le \int_0^1 e^x \times x^n \le \int_0^1 e x^n$

$\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le e\int_0^1 x^n \, dx$

$0 \le \frac{1}{n+1} \le I_n \le e\int_0^1 x^n \, dx$

$\boxed{\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}}$

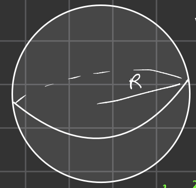
3) $e\int_0^1 x^n \, dx = e \times \frac{1}{n+1} = \frac{e}{n+1}$

$0 \le I_n \le \frac{e}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} 0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$

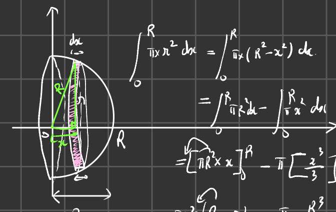
D'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$



$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

$r^2 = R^2 - x^2$



$\int_0^R \pi \times r^2 \, dx = \int_0^R \pi(R^2 - x^2) \, dx$

$= \int_0^R \pi R^2 \, dx - \int_0^R \pi x^2 \, dx$

$= \left[\pi R^2 \times x\right]_0^R - \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^R$

$= \pi R^2 (R - 0) - \pi \frac{R^3}{3}$

$= \frac{\pi R^3 \times 3}{1 \times 3} - \frac{\pi R^3}{3} = \frac{3\pi R^3 - \pi R^3}{3}$

$\frac{V}{2} = \frac{2\pi R^3}{3}$

$\boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}}$

$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$

$\mathcal{A} = 4\pi R^2$