plus de bonnes notes

Terminale générale - Spé maths 03/04/23.

$n \in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$.

1) a) $x \in [n;n+1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$I_{n+1} - I_n = \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$

$= [\ln(x)]_{n+1}^{n+2} - [\ln(x)]_n^{n+1}$

$= \ln(n+2) - \ln(n+1) - (\ln(n+1) - \ln(n))$

$= \ln(n+2) - \ln(n+1) - \ln(n+1) + \ln(n)$

$= \ln(n+2) + \ln(n) - 2\ln(n+1)$

$= \ln(n \times (n+2)) - \ln((n+1)^2)$

$= \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right) < 0$

(I_n) est décroissante.

b) $\forall x \in [n;n+1]$, $\frac{1}{x} > 0$.

$\Rightarrow I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx > 0$

D'une part (I_n) est décroissante.
D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n \geq 0$.
D'après le théorème de la convergence monotone, (I_n) converge vers $l \in \mathbb{R}_+$.

2) Soit $n < x < n+1$.
On applique la fonction inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\frac{1}{n} > \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n}$

Par croissance de l'intégrale :

$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx$

$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n}}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

D'après le théorème du sandwich,

$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 3 :

(a) $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} 4e^t\,dt = 4\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^t\,dt$

$= 4[e^t]_{\ln(2)}^{\ln(3)}$

$= 4(e^{\ln 3} - e^{\ln(2)})$

$= 4(3-2)$

$= 4 \times 1 = 4$

$u = t^2 - 1$
$u' = 2t$

b) $\int_0^1 t e^{t^2-1}\,dt$

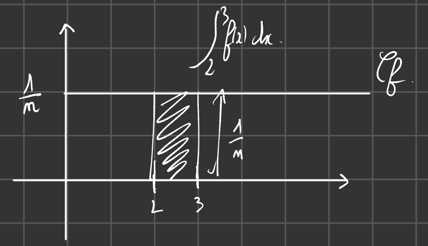
$= \int_0^1 \frac{1}{2} \times 2t\, e^{t^2-1}\,dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 2t \times e^{t^2-1}\,dt$

$= \frac{1}{2} \times \left[e^{t^2-1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} \times \left(e^{1^2-1} - e^{0^2-1}\right) = \frac{1}{2} \times (e^0 - e^{-1}) = \frac{1e}{2e} - \frac{1}{2e} = \boxed{\frac{e-1}{2e}}$.

$2e^{2t-1}$



$\int_2^3 2\,dx = [2x]_2^3$

$= 2\times 3 - 2 \times 2$

$= 2$.

$e^t = (t-1)e^t$.

$u(x) = x^2-2$
$u'(x) = 2x$

$f(x) = 3x e^{x^2-2}$

$f(x) = 3 \times \frac{1}{2} 2x\, e^{x^2-2}$

$f(x) = \frac{3}{2} \times 2x\, e^{x^2-2}$

$F(x) = \frac{3}{2} \times e^{x^2-2}$

c) $\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1}\,dt$

On a $u = t^4+1$
$u' = 4t^3$ or on a t^3

$\frac{1}{4}\ln(t^4+1)$

$\int_1^2 \frac{1}{4} \times \frac{4t^3}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{4}\left[\ln(t^4+1)\right]_1^2$

$= \frac{1}{4}\left(\ln(2^2+1) - \ln(1^2+1)\right)$

$= \frac{1}{4}(\ln(5) - \ln(2))$

$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$