plus de
bonnes notes

Graphes

A : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.
NONA : $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $x^2 < 0$.

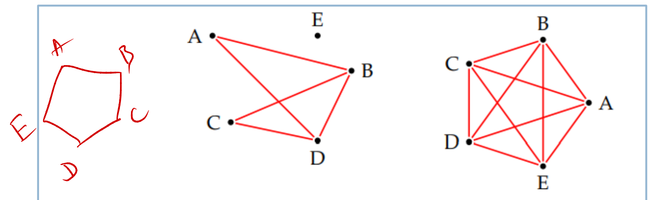
I. GRAPHES

1. Définitions

Définition : Eléments d'un graphe

$\forall$
$\exists$

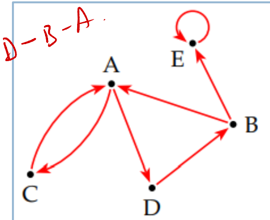
- Un graphe d'ordre n est un ensemble de n points, appelés sommets, reliés entre eux par des liens.
- Dans un graphe non orienté, les liens reliant deux sommets se schématisent par un trait, appelé arête, et dans un graphe orienté par une flèche, appelée arc.
- Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête ou un arc.
- Un sommet est isolé si aucune arête ou arc ne le relie aux autres sommets.
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ou d'arcs dont ce sommet est une extrémité (une boucle comptant pour 2).
- Un graphe est complet si tous les sommets sont adjacents entre eux. Σ degrés $= 2 \times$ arêtes.



Nature	Graphe 1 d'ordre 5 non orienté	Graphe 2 d'ordre 5 non orienté
Degré des sommets	A: 2, B: 3, C: 2, D: 3, E: 0	Graphe complet, Sommets de degré 4

A	B	C	D	E
2	3	2	3	0

A-D-B-A.



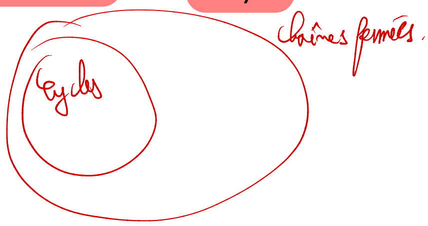
Graphe 3 d'ordre 5 orienté

A	B	C	D	E
4	3	2	2	3

Définition : parcours dans un graphe

- Une chaîne est une liste de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
- Un graphe est connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.
- Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes forme un cycle.

Remarque



Dans un graphe orienté, on parle de chemin pour une chaîne et de circuit pour un cycle :

- Graphe 1 : A-B-D-C-B chaîne de longueur 4; D-A-B-C-D cycle de longueur 4.
- Graphe 3 : A-D-B-E chemin de longueur 3; B-A-C-A-D-B circuit de longueur 5.

Théorème

Dans un graphe, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes.

Démonstration

En effet, une arête relie nécessairement deux sommets, par définition.

2. Matrice d'adjacence

Définition

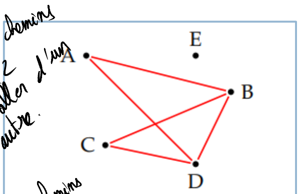
A tout graphe G d'ordre n, on peut associer une matrice carrée $m = (a_{ij})$ d'ordre n telle que a_{ij} est le nombre d'arcs ou d'arêtes reliant le sommet i au sommet j. Cette matrice est appelée matrice d'adjacence du graphe G.

Remarque 3 chemins de longueur 2.

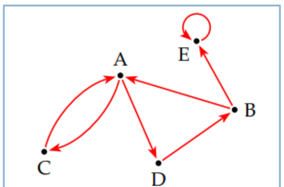
La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

$m_{1,2}$: le nombre de chemins de longueur 2 permettant d'aller d'un sommet à l'autre.

le nombre de chemins de longueur 1



$$M_1 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$M_2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème : Nombre de chemins de longueur p

Soit G un graphe d'odre n et $M = (m_{ij})$ sa matrice d'adjacence. Si on note $M^p = (m_{ij}^{(p)})$, alors m_{ij}^p est le nombre de chemins de longueur p reliant le sommet i au sommet j.

Démonstration

Montrons par récurrence que :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, m_{ij}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur p reliant i à j.

Initialisation : $p = 1$. m_{ij}^1 est le nombre de chemins de longueur 1 reliant i à j par définition de la matrice d'adjacence. La proposition est donc initialisée.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que m_{ij}^p est le nombre de chemins de longueur p reliant i à j.

$$m_{ij}^{(p+1)} = M^{p+1} = MM^p$$

$$= (m_{ij})\left(m_{ij}^{(p)}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} m_{kj}^{(p)}\right)$$

- m_{ik} est le nombre de chemins de longueur 1 reliant i à k.
- m_{kj}^p nombre de chemins de longueur p reliant k à j.
- Donc $m_{ik}m_{kj}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur $p+1$ reliant i à j passant par k.

Par somme, $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}m_{kj}^{(p)}$ est le nombre **total** de chemins de longueur $p+1$ reliant i à j.

Alors la proposition est héréditaire.

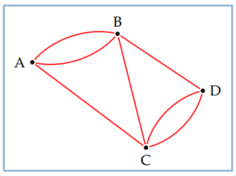
Conclusion : Par initialisation et hérédité :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, m_{ij}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur p reliant i à j.

$$M = \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 2 & 1 & 0 \\ B & 2 & 0 & 1 & 1 \\ C & 1 & 1 & 0 & 2 \\ D & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Application

Les arêtes du graphe ci-contre représentent des pistes de ski de fond mesurant chacune 2 km. Les sommets de ce graphe sont les différents points d'accès à ce domaine skiable.



1. Déterminer la matrice d'adjacence du graphe.

2. Déterminer le nombre de parcours de $4\ km$ reliant B à C. 2m

3. Déterminer le nombre de parcours de $6\ km$ reliant C à C.

4. D'au plus $6\ km$ reliant A à D.

3. Graphe pondéré

Définition : Parcours dans un graphe pondéré

- Un graphe est pondéré (orienté ou non) lorsque ses arêtes sont affectées de nombres positifs.
- Le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes qui la composent.

Exemple

Les chaînes reliant A à D :

- A-D de poids 7.
- A-C-A-D de poids 4 + 2 + 1 = 7.
- A-F-E-D de poids 1 + 5 + 3 = 8
- A-F-C-A-D de poids 1 + 2 + 2 + 1 = 6

La dernière chaîne est la plus courte pour relier A à D.

Remarque

Il existe un algorithme pour déterminer la chaîne la plus courte reliant deux sommets : l'algorithme de Moore-Dijkstra. Mais il est souvent plus rapide sur des graphes simples de le faire de façon artisanale.

II. CHAINE DE MARKOV

1. Graphe probabiliste

Définition

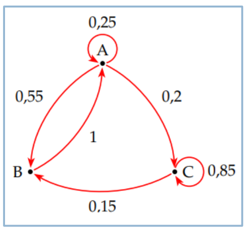
Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré vérifiant :

- Tous les poids appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.
- • La somme des poids des chemins issus d'un sommet est égale à 1.

La matrice d'adjacence d'un graphe probabiliste est une matrice stochastique.

Exemple

On considère le graphe probabiliste suivant :



On a la matrice d'adjacence suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,55 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

2. Chaîne de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires (X_n) définies sur un même espace probabilisé (où la probabilité est notée p) à valeur dans un ensemble E, appelé « espaces d'états » et vérifiant la propriété caractéristique :

$$\forall i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in E,$$

$$P_{(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n)}(X_{n+1} = i_{n+1})$$

$$= \boxed{P_{(X_n=i_n)}(X_{n+1} = i_{n+1})}$$

Remarque

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires (X_n) telle que la loi de probabilité de X_{n+1} ne dépend uniquement de X_n.

Si cette chaîne modélise un processus temporel, l'état futur du système X_{n+1}, ne dépend que de son état précédent X_n, et non des états passés $(X_0, X_1, \dots, X_{n-1})$. Un tel processus est alors qualifié de « processus sans mémoire ».

3. Chaîne de Markov homogène

Définition

Une chaîne de Markov est « homogène » si, pour tout $i, j \in E$, la probabilité $P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de n. On la note alors p_{ij}. La matrice $P = (p_{ij})$ est appelée « matrice de transition » de la chaîne de Markov.

Remarque

Dans le cadre de la modélisation d'un processus en temps discret, dire que la probabilité $P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de n signifie que la transition de l'état i à l'état j ne dépend pas de l'instant considéré mais seulement du fait d'être dans l'état i.

Propriété

La matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène est une matrice stochastique. À une matrice d'une chaîne de Markov homogène, on peut associer un graphe probabiliste dont les sommets sont les états de l'espace E et les arcs reliant l'état i à l'état j sont affectés des coefficients p_{ij}.

Démonstration

Supposons que l'espace des états E possède N éléments :

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = \sum_{j=1}^{N} P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} P_{X_0=i}(X_1 = j)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{P[(X_0 = i) \cap (X_1 = j)]}{P(X_0 = i)}$$

$$= \frac{1}{P(X_0 = i)} \sum_{j=1}^{N} P[(X_0 = i) \cap (X_1 = j)] = 1$$

Remarque

On pourra définir une chaîne de Markov par un graphe probabiliste.

4. Distribution de transition

Théorème : Relation de Chapman-Kolmogorov

Soit Une chaîne de Markov homogène de $P = (p_{ij})$ sa matrice de transition. Si on note : $P^n = (p_{ij}^{(n)})$, on a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{p_{ij}^{n} = p_{(X_0=i)}(X_n = j)}$$

Remarque

La démonstration est admise. La démonstration par récurrence est basée sur l'homogénéité et l'absence de mémoire qui permet de « jouer » sur les événements qui conditionnent (qu'importent les événements passé).

Théorème : Loi de X_n

L'espace des états est noté $E = \{1; 2; \dots; N\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n est définie par les N probabilités :

$$P(X_n = 1), P(X_n = 2), \dots, P(X_n = N)$$

Soit π_n la matrice ligne :

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & \dots & P(X_n = N) \end{pmatrix}$$

On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \pi_{n+1} = \pi_n P \Rightarrow \pi_n = \pi_0 P^n}$$

Remarque

La loi d'une chaîne de Markov homogène est entièrement donnée par sa distribution initiale π_0 et sa matrice de transition P.

Démonstration

Établissons la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \pi_{n+1} = \pi_n P$$

$(X_n = i)_{i \in E}$ forme une partition de l'univers Ω.

On rappelle que :

$$P_{ij} = P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j)$$

$$= \frac{P[(X_n = i) \cap (X_{n+1} = j)]}{P(X_n = i)}$$

Posons $\pi_n P = (q_{1j})$ une matrice ligne.

$$q_{1j} = \sum_{i=1}^{n} P(X_n = i) p_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(X_n = i) P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P[(X_n = i) \cap (X_{n+1} = j)]$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (q_{ij}) = (p(X_{n+1} = j)) = \pi_{n+1}}$$

5. Distribution invariante

Définition

Soit une chaîne de Markov homogène (X_n) de matrice de transition P. π est une distribution invariante si la matrice ligne π vérifie : $\pi P = \pi$

Remarque

π n'existe pas si $(P - I_N)$ est inversible car une distribution ne peut correspondre au vecteur nul.

Théorème : Unicité de la distribution invariante

Soit une chaîne de Markov homogène (X_n) de matrice de transition P d'ordre N. Si P ne possède aucun coefficient non nul autre que sur sa diagonale principale, alors (X_n) admet une unique distribution invariante.

Exemple

Si $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ alors la distribution invariante est :

$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

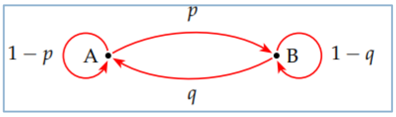
Théorème

Soit une chaîne homogène de Markov (X_n) et soit (π_n) la suite de ses distributions.

- Si (π_n) est convergente alors elle converge vers une distribution invariante π.
- Si (X_n) à deux états admet une distribution invariante π, alors quelque soit la distribution initiale π_0, l asuite (π_n) converge vers π.

Démonstration

Uniquement une chaîne à deux états A et B. On a alors le graphe et la matrice de transition suivants $p, q \in]0;1[$:



$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Cherchons la distribution invariante $\pi = (x \quad 1-x)$ telle que $x \in]0;1[$:

$$\pi = \pi P \Rightarrow x = x(1-p) + q(1-x)$$

$$\Rightarrow x = \frac{q}{p+q}$$

D'où $\pi = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$

Soit une distribution initiale π_0, on a ma distribution à l'instant n, $\pi_n = (x_n \quad 1 - x_n)$.

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n(1-p) + q(1-x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = (1-p-q)x_n + q$$

La suite (x_n) est arithmético-géométrique. On définit la suite :

$$u_n = x_n - \frac{q}{p+q}$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{q}{p+q} \\
&= (1-p-q)x_n + q - \frac{q}{p+q} \\
&= (1-p-q)\left(x_n - \frac{q}{p+q}\right) \\
&= (1-p-q)u_n
\end{aligned}
$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $1-p-q$.

Or $p, q \in]0;1[$ donc :

$$-1 < 1-p-q < 1$$

La suite (u_n) converge donc vers 0 et donc la suite (x_n) converge vers $\frac{q}{p+q}$.

La distribution (π_n) converge donc quelque soit l'état initial π_0 vers π.

Définition : Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne ssi il existe une chaîne qui parcourt toutes les arêtes une unique fois.

Exercice bilan : généralités sur les graphes

L'organisatrice d'une course à pied dans la ville de Berlin voudrait faire passer les participants par les lieux suivants :

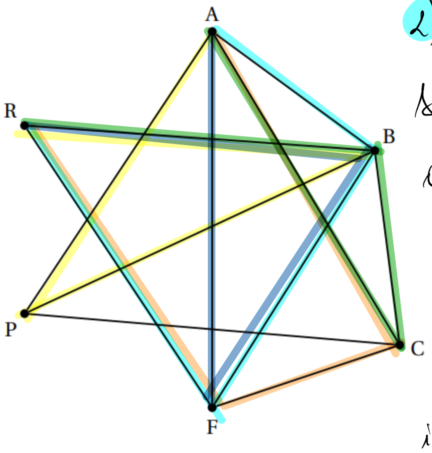
- Alexanderplatz (A)
- Porte de Brandebourg (B)
- Checkpoint Charlie (C)

- Fleamarket (F)
- Musée de Pergame (P)
- Reichstag (R)

Théorème : 1) Un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement s'il a zéro ou exactement deux sommets de degré impair.

2) Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

On peut résumer la situation par le graphe ci-dessous :



2/a)

Sommets	A	B	C	R	P	F
Degrés	4	5	4	2	3	4

Ici, il y a exactement 2 sommets de degré impair donc ce graphe admet une chaîne eulérienne.

b) Ce graphe n'a pas de cycle eulérien car il existe des sommets de degré impair.

Les lieux sont représentés par les sommets, et les rues ouvertes à la course par les arêtes.

1. **a.** Quel est l'ordre de ce graphe ? ordre 6.
   b. Est-il complet ? Justifier. Il n'est pas complet car R et P ne sont pas reliés par une arête.
   c. Est-il connexe ? Justifier. Il est connexe car tous les sommets sont reliés par une chaîne, 2 à 2.
2. **a.** L'organisatrice peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues ? Justifier.
   b. Peut-elle envisager un parcours passant par tous ces lieux en empruntant une seule fois chacune des rues, et dont le départ et l'arrivée se font au même endroit ?
3. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe, en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3)

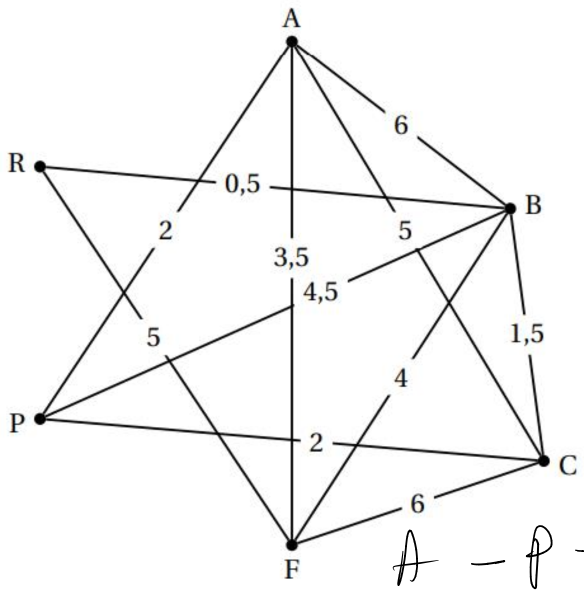
	A	B	C	F	P	R
A	0	1	1	1	1	0
B	1	0	1	1	1	1
C	1	1	0	1	1	0
F	1	1	1	0	0	1
P	1	1	1	0	0	0
R	0	1	0	1	0	0

4. On admet que :

$$M^3 = \begin{array}{c} \\ A \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & & & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 13 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 13 & 12 & 13 & 12 & 11 & 8 \\ 11 & 13 & 10 & 12 & 10 & 5 \\ 12 & 12 & 12 & 8 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 10 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Combien de parcours peut-on envisager d'Alexanderplatz au Reichstag passant par exactement 3 rues ?
Justifier la réponse. 5 chemins.

5. L'organisatrice veut également prévoir un autre parcours pour les coureurs moins expérimentés. Ce parcours doit débuter à Alexanderplatz et se terminer au Reichstag.
Les distances entre les différents lieux sont indiquées en kilomètres sur le graphe ci-dessous.



A – P – C – B – R

Déterminer le parcours le plus court possible d'Alexanderplatz au Reichstag. Donner sa longueur.

A	B	C	F	P	R	Sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
	6(A)	5(A)	3,5(A)	2(A)	∞	P(2)
	6(A)	4(P)	3,5(A)		∞	F(3,5)
	6(A)	4(P)			8,5(F)	C(4)
	5,5(C)				8,5F	B(5,5)
					6(B)	R(6)

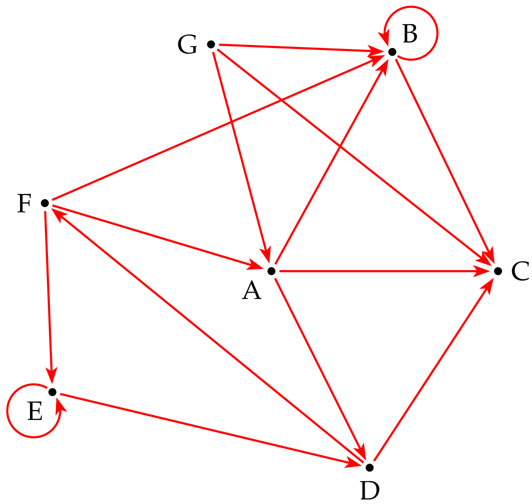
Graphes et chaîne de Markov

Caractéristique d'un graphe et matrice d'adjacence

Exercice 1

On considère le graphe orienté ci-contre.

1) Déterminer l'ordre du graphe.
2) Déterminer le degré de chaque sommet.
3) En déduire par un calcul le nombre d'arcs de ce graphe.
4) Déterminer un chemin de longueur 5 reliant A à C.
5) Peut-on trouver un circuit d'origine A ?
6) Peut-on trouver un circuit d'origine C ?



Exercice 2

Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe d'ordre n non orienté ?

Exercice 3

Un site de rencontre prend en compte quatre critères : aimer les musées ; aimer le sport ; aimer les rencontres et aimer la montagne. Les personnes A, B, C, D et E sont inscrites sur ce site. Leurs profils sont inscrits dans le tableau suivant :

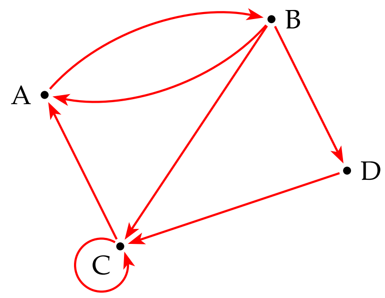
	Aime la montagne	Aime les musées	Aime le sport	Aime les rencontres
A	oui	non	oui	non
B	non	non	oui	oui
C	non	oui	non	non
D	oui	non	oui	oui
E	oui	oui	oui	non

On admet que deux personnes sont compatibles si elles ont au moins deux affinités en commun.

Construire un graphe modélisant les compatibilités possibles entre les inscrits puis en donne la matrice d'adjacence.

Exercice 4

Soit le graphe orienté suivant :



1) Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.
2) Combien existe-t-il de chemins :
   a) de longueur 4 reliant D à A ?
   b) de longueur 6 reliant B à C ?

Exercice 5

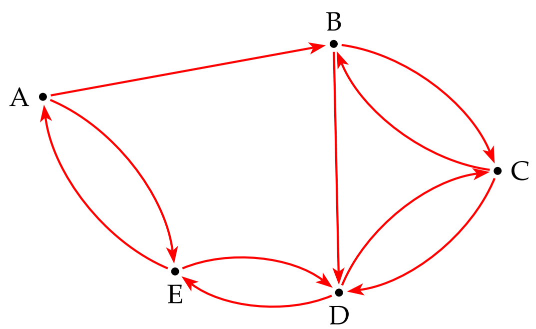
On donne les matrices d'adjacence **A** et **B** correspondantes aux graphe G_1 et G_2 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Comment peut-on savoir sans tracer son graphe qu'une matrice d'adjacence correspond à à un graphe non orienté ?
2) a) Tracer les graphes G_1 et G_2.
   b) Déterminer le nombre de chaînes ou de chemin de longueur 3 reliant le sommet 2 au sommet 4.

Exercice 6

Une exposition est organisée dans un parc. On décide d'y instaurer un plan de circulation : certaines allées sont à sens unique, d'autres sont à double sens. Le graphe ci-dessous modélise la situation.



1) Donner la matrice d'adjacence **M** de ce graphe (dans l'ordre alphabétique).
2) Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de rendre de D à B ?
   Les donner tous.
3) Montrer qu'il n'existe qu'un seul circuit de longueur 5 passant par A.
   Quel est ce cycle ? En est-il de même pour B ?

Chaîne de Markov

Exercice 7

Graphe probabiliste

Trois chaînes de télévision A, B, C se partagent la diffusion de la coupe du monde de football. D'un match au suivant, elle évolue de la façon suivante :

- 10 % des téléspectateurs de A passent sur B et 10 % sur C ;

- 20 % des téléspectateurs de B passent sur A et 10 % sur C ;
- 30 % des téléspectateurs de C passent sur A et 10 % sur B.

1) Représenter cette évolution par un graphe.
2) Pourquoi s'agit-il d'un graphe probabiliste ?
3) Déterminez la matrice de d'adjacence **M**. (Dans l'ordre A, B, C)

EXERCICE 8

1) Un élève doit répondre à une série de questions.
   À chaque fois, il peut être aidé. S'il est aidé une fois, il recommence la fois d'après avec une probabilité de 1/3 ; s'il n'est pas aidé, il continue avec une probabilité de 0,5.
   a) Pourquoi peut-on adopter le modèle de Markov ?
      S'agit-il d'une chaîne de Markov homogène ? Pourquoi ?
   b) Donner la liste des états et les probabilités conditionnelles associées.
   c) Représenter cette situation par un graphe.
2) Sarah révise une leçon tous les jours, de manière aléatoire mais sans jamais reprendre une leçon déjà révisée.
   Peut-on adopter un modèle de Markov ? Pourquoi ?

EXERCICE 9

Dans une usine, deux machines A et B peuvent tomber en panne de manière indépendante l'une de l'autre dans la journée avec une probabilité 1/3. On suppose que si une machine tombe en panne, elle est réparée dans la nuit mais que l'on ne peut réparer qu'une seule machine en une nuit. On note X_n le nombre de machines en panne au matin du n-ième jour.

1) a) Justifier que la suite (X_n) forme une chaîne de Markov homogène.
   b) Pourquoi peut-on considérer deux états ? Quels sont-il ?
2) a) On appelle P_A et P_B les événements correspondant à « la machine A est en panne » et « la machine B est en panne ». Compléter le tableau de probabilité double entrée suivant :

	P_A	$\overline{P_A}$	Total
P_B			$\frac{1}{3}$
$\overline{P_B}$			
Total			1

   b) En déduire la matrice de transition.de cette chaîne de Markov.
   c) Représenter le graphe de cette chaîne de Markov

EXERCICE 10

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$

1) Pourquoi la matrice **A** est stochastique ?

2) On admet que la matrice **A** est la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène liée aux états $\{1, 2, 3\}$.

   a) Que signifie le terme « homogène » pour une chaîne de Markov ?

   b) Représenter le graphe associé à cette chaîne de Markov.

   c) . Donner les probabilités suivantes :
   $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 3)$, $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1)$, $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)$

Exercice 11

Représenter le graphe des matrice de transition **T** des chaîne de Markov homogènes suivantes. On prendra comme espace des états : $\{A, B, C, \dots\}$.

1) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 10 & \end{pmatrix}$

2) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,6 & 1 & 0 \\ 0,55 & 0,2 & 0,25 \\ 0 & 0,9 & 0,2 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12

On considère que la météo varie entre deux états beau et mauvais temps. Après un jour de beau temps, on a une chance sur deux que le temps change le jour suivant et le mauvais temps a trois fois plus de chance de durer d'un jour au jour suivant.

1) Pourquoi peut-on dire que la situation peut être modélisée par une chaîne de Markov ?

2) Donner sa matrice de transition.

Problèmes

Exercice 13

Météo

Dans une ville il peut venter, neiger ou grêler. Le vent et la grêle ne restent jamais deux jours de suite. S'il vente un jour donné, le lendemain il neige ou il grêle de manière équiprobable. S'il neige, il y a une chance sur trois qu'il vente le jour d'après et une chance sur deux qu'il continue à neiger le lendemain. Après un jour de grêle, il y a deux fois plus de chance d'avoir de la neige que du vent.

1) Justifier la modélisation de la météo dans cette ville par une chaîne de Markov.'

2) Représenter le graphe puis donner la matrice **T** de transition de cette chaîne de Markov associée aux états V, N et G.

3) Quelle est la probabilité, qu'après deux jours de neige, le vent souffle ?

4) Quelle est la distribution invariante de cette chaîne de Markov ?

EXERCICE 14

États d'une pièce mécanique

Un garagiste contrôle tous les mois l'état d'une pièce de moteur. Elle peut se trouver dans les états suivants : fonctionnelle (F), usée (U) ou défaillante (D).
On considère que la situation peut se modéliser avec une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée dans l'ordre F, U, D par

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Expliquer les coefficients de la dernière ligne de la matrice **T**
2) Dresser le graphe correspondant à cette chaîne.
3) Au début des contrôles, la pièce vient d'être changée pour une pièce neuve. Quelle est la probabilité pour qu'au bout de 6 mois, la pièce soit défaillante ?

EXERCICE 15

Simulateur

Un simulateur de jeux est programmé pour le niveau difficile de la façon suivante :

- La personne a 15 % de chance de réussite au premier jeu, puis ;
- si la personne a gagné, elle a une chance sur quatre de gagner le jeu suivant ;
- si la personne a perdu, elle a deux chances sur cinq de gagner le jeu suivant.

Soit X_n la variable aléatoire correspondant à la réussite du joueur au n-ieme jeu.

1) a) Justifier que la suite de variables aléatoires (X_n) est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace des états.
   b) Représenter le graphe puis donner la matrice de transition **P** de cette chaîne.
2) a) Donner la distribution initiale π_0 de cette chaîne puis exprimer la distribution π_n au n-ième jeu en fonction de π_0 et de **P**.
   b) En déduire la probabilité qu'un joueur gagne le cinquième jeu.
   c) Déterminer la distribution invariante π de cette chaîne.
   d) Comment programmer les chances de réussites initiales afin qu'un joueur ait les mêmes chances quel que soit le nombre de parties qu'il fait ?

EXERCICE 16

Atome d'hydrogène

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable (S) et l'état excité (E). À chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01. Mais l'on ne connaît pas en revanche, la probabilité a de changement de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante.
Soit la chaîne de Markov (X_n) décrivant les états de l'atome.

1) Donner, en fonction de a, la matrice de transition (X_n) associée aux états S et E.
2) Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %. Déterminer la valeur de a.

EXERCICE 17

Jeux vidéo

Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A ou l'équipe B ou bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire S. Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.

Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

- un joueur de A y reste le jour suivant avec une probabilité de $0,6$; il devient joueur S avec une probabilité de $0,25$. Sinon, il rejoint B ;
- un joueur de B y reste le jour suivant avec une probabilité de $0,6$; sinon, il devient joueur S avec une probabilité identique à celle de rejoindre A ;
- un joueur S garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\dfrac{1}{7}$; il rejoint B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre A.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont S.

On note $\pi_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & s_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours. On a donc : $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) On note p la probabilité qu'un joueur S un jour donné passe dans A le jour suivant. Déterminer p.
2) a) Justifier que l'état probabiliste π_n d'un joueur obéit à une chaîne de Markov.
   b) Représenter le graphe de cette chaîne de Markow associée aux états A, B, S.
   c) Déterminer la matrice de transition **T**
   d) Exprimer π_n en fonction de π_0 et **T**
   e) Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine (arrondir au millième).
3) On pose $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix}$.
   a) Donner, à l'aide la calculatrice, le produit matriciel **VT**. Que constate-t-on ?
   b) En déduire un état probabiliste π qui reste stable d'un jour sur l'autre.
4) On programme en Python une matrice avec le module numpy. On rentre une matrice avec la fonction np.array où chaque ligne est écrite entre crochets. Les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0.
   Pour une matrice M : M[1,2] est le coefficient de la 2^e^ ligne et de la 3^e^ colonne.
   La fonction np.dot(A,B) multiplie la matrice **A** avec la matrice **B**

```
import numpy as np
def pi(n):
    T=np.array([[3/5,3/20,1/4],[1/5,3/5,1/5],
    [3/14,9/14,1/7]])
    pi=np.array([[0,0,1]])
    for i in range(n):
        pi=np.dot(pi,T)
    return pi[0,0]
```

   a) Quelle est la valeur numérique arrondie au millième retournée par pi(7) ? L'interpréter dans le contexte de l'exercice.
   b) Modifier la fonction pi(n) pour qu'elle retourne la fréquence de joueurs S .

Exercice 18

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition. Les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

- S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,
- I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,
- M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains S, $\dfrac{1}{3}$ deviennent I et $\dfrac{1}{3}$ deviennent M,
- parmi les individus porteurs sains, $\dfrac{1}{2}$ deviennent M.
- Ceux qui sont malades le restent

On note $\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} s_n & i_n & m_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines des états S, I et M. On a alors $\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 0,99 & 0 & 0,01 \end{pmatrix}$

1) Justifier que l'état probabiliste $\mathbf{P}_n$ obéit à une chaîne de Markov.
2) Représenter le graphe de cette chaîne de Markov associée aux états S, I, M.
3) Déterminer la matrice de transition $\mathbf{A}$
4) Exprimer $\mathbf{P}_n$ en fonction de $\mathbf{P}_0$ et $\mathbf{A}$.
5) Déterminer l'état probabiliste au bout de quatre semaines (arrondir à 10^{-2}).
   Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\[2mm] \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\[2mm] \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On note $\mathbf{Q}_n$ donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination.
$\mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$ donne les états S, I, M la n-ième semaine après la vaccination.
Avec $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_4$.

1) Exprimer $\mathbf{Q}_n$ en fonction de $\mathbf{Q}_0$ et $\mathbf{B}$.
2) a) Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{B}^2 = k\mathbf{J}$ où $\mathbf{J}$ est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   On pourra, pour calculer la valeur exacte de $\mathbf{B}^2$, calculer d'abord $(12\mathbf{B})^2$.
   b) Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 2, \ \mathbf{B}^n = \mathbf{B}^2$.
   c) En déduire $\mathbf{Q}_n$pour tout $n \geqslant 2$.
   d) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.
   Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

Exercice 19

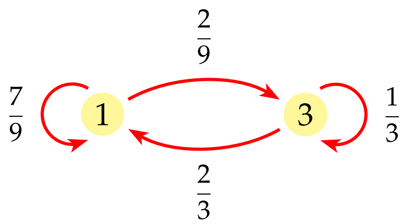
Ehrenfest à trois boules

On dispose de deux urnes A et B. Initialement l'urne A contient trois boules numérotées 1, 2, 3. L'urne B est vide.
À chaque instant, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on change la boule portant le numéro choisi d'urne.
On s'intéresse au nombre de boules contenu dans l'urne A à l'instant n, que l'on consigne dans une variable aléatoire (X_n).

1) a) Quels sont les états possibles pour (X_n) ?
   b) Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov homogène.
   c) Donner la répartition initiale π_0 associée ?
   d) Représenter par le graphe de cette chaîne de Markov.
   e) En déduire la matrice de transition **T**

2) Démontrer que la répartition stable π correspond à la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$.

3) On note p_n, la probabilité qu'il y ait trois boules dans l'urne A à l'instant n.
   a) Démontrer que si n est impair, $p_n = 0$.
   b) Expliquer le graphe probabiliste ci-contre, qui décrit l'évolution du nombre de boules dans A entre l'étape $2k$ et l'étape $2k+2$ ($k \in \mathbb{N}$).



   c) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$: $\quad p_{2k+2} = \dfrac{1}{3}p_k + \dfrac{2}{9}(1 - p_n)$
   d) On pose $\quad u_k = p_{2k}$ et $\quad v_k = u_k - \dfrac{1}{4}$. Montrer que la suite (v_k) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   En déduire v_k en fonction de k puis p_{2k} en fonction de k
   e) Déterminer $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} p_{2k}$ puis $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n$.
   f) Que retrouve-t-on comme résultat ?

4) On appelle D la variable aléatoire qui indique le nombre d'étapes jusqu'au premier retour à l'état initial (trois boules dans A).
   a) Démontrer que, si n est impair, alors $\; P(D = n) = 0$.
   b) Déterminer $\; P(D = 2) \;$ et $\; P(D = 4)$.
   c) Quelle est la probabilité de revenir au moins une fois à l'état initial en moins de cinq étapes ?

5) On voudrait visualiser l'ensemble des états de l'urne A jusqu'à l'instant n.

   Pour cela, on programme une fonction en Python ehrenfest(n) qui détermine la liste X des $(n+1)$ états de l'urne A : l'état initial et les n changements d'états. On programme ensuite une fonction courbe(n) qui visualise l'ensemble des états de l'urne A :

```
from random import*
import matplotlib.pyplot as plt
def ehrenfest(n):
    A=[i for i in range(1,4)]
    X=[len(A)]
    for i in range(n):
        b=randint(1,3)
        if b in A:
            A.remove(b)
        else:
            A.append(b)
        X.append(len(A))
    return X

def courbe(n):
    plt.xlim(0,n)
    plt.ylim(0,3)
    plt.grid(linestyle="-")
    x = [i for i in range(n+1)]
    plt.plot (x, ehrenfest(n),marker='o')
    plt.show()
```

a) Expliquer les instruction suivantes :
« X=[len(A)] » ; « if b in A : » ; « A.remove(b) » ; « A.append(b) » ; « X.append(len(A)) ».

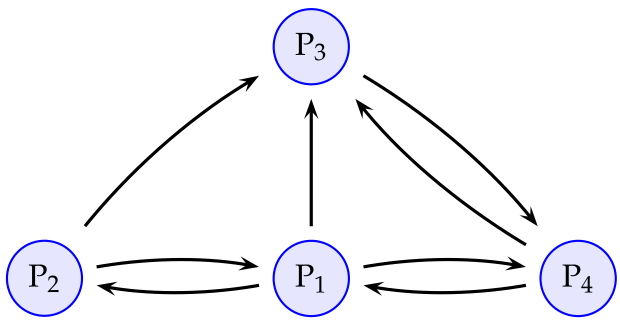
b) Exécuter courbe(20) et courbe(50) et confirmer les résultats de la question 3)

c) Modifier cet algorithme avec les fonctions ehrenfest(N,n) et courbe(N,n) pour qu'il affiche les différents états avec N boules.
Exécuter courbe(100,500). Vers quelle valeur semble évoluer le système ?

EXERCICE 20

Algorithme PageRank

Le Web a une structure de graphe car les pages se citent mutuellement.
Lors d'une recherche, le moteur de recherche doit pouvoir classer la multitude de pages par pertinence par rapport aux mots clés de la recherche.
C'est à cet effet qu'a été crée l'algorithme PageRank.
On considère un micro-web composé de quatre pages, les liens hypertexte de ces pages sont présentés dans le graphe ci-dessous.



Chaque arc représente un lien hypertexte, par exemple la page 2 contient un lien vers la page 1 mais la page 3 ne contient pas de lien vers la page 1.

1) Déterminer le nombre de liens de chaque page.

2) Si une page contient n liens, dispersion, alors chaque lien aura pour poids $\dfrac{1}{n}$.
Recopier le graphe et pondérer chaque arc.

3) Pour classer ces pages, on leur attribue un score : s_1 pour P_1, s_2 pour P_2, ...
PageRank attribue les scores en suivant la règle récursive suivante :
Soit P_1, P_2, ..., P_n l'ensemble des pages ayant un lien vers une page P_k,
soit $c_1, c_2, \dots, c_n$ les poids respectifs de ces liens, alors le score de P_k est

$$s_k = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \cdots + c_n s_n$$

a) Montrer que les scores s_1, s_2, s_3 et s_4 des quatre pages vérifient le système :

$$\begin{cases} 2s_1 - s_2 - s_3 = 0 \\ -3s_1 + s_2 = 0 \\ -2s_1 - 3s_2 + 6s_3 - 3s_4 = 0 \\ -s_1 - 3s_3 + 3s_4 = 0 \end{cases}$$

b) On pose $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$.
Résoudre ce système et donner les valeurs de s_1, s_2, s_3 et s_4.

c) Quelle est la page la plus pertinente ?