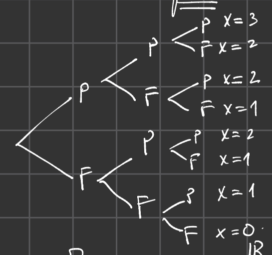
Variable aléatoire X : fonction.



$\Omega = \{(P;P;P);$
$(PPF); (PFP);$
$\dots (F;F;F)\}$

$Y = 2X$

$E(Y) = E(2X)$
$= 2E(X)$

$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$

$e_i \longmapsto$

X compte le nombre de piles.

$X=k$	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1.$$

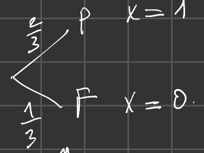
$E(X)$
et $V(X)$
et $\sigma(X)$.

$E(X) = 6$

$E[(X+2)] = 8$?

$E(2X) = 2 \times E(X)$!

$E(aX+b) = a\times E(X) + b$?



$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i.$$

Soit $Y = a.X + b$.

$$\boxed{\begin{aligned} E(Y) &= E(aX+b) \\ &= a\times E(X) + b. \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^{n} p_i . y_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} p_i . (a x_i + b) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a p_i x_i + b p_i . \\ &= \sum_{i=0}^{n} a p_i x_i + \sum_{i=0}^{n} b p_i . \\ &= a \sum_{i=0}^{n} p_i x_i + b \sum_{i=0}^{n} p_i \\ &= \boxed{a\ E(X) + b} \end{aligned}$$

10 0 10 10

↓

10 10

Mauvaise Bonne

$$\frac{(20-10)^2 + (0-10)^2}{2}$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

$$\int_1^2 x\,dx \qquad \sum_{i=1}^{2} i = 1 + 2.$$

$= 1 + 1{,}001 + 1$

$X=k$	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = \frac{1}{8}\times 0 + \frac{3}{8}\times 1 + \frac{3}{8}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3.$

$E(X) = 1{,}5.$

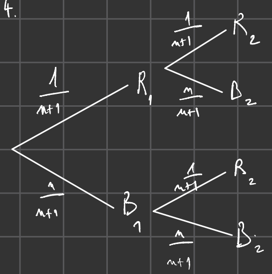
$V(X) = \frac{1}{8}(0-1{,}5)^2 + \frac{3}{8}(1-1{,}5)^2 + \frac{3}{8}(2-1{,}5)^2 + \frac{1}{8}(3-1{,}5)^2$

$V(X) = 0{,}75 = \frac{3}{4}.$

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

n°4.

1)



$P(M) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap B_2)$.

$P(M) = \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2}$

$\boxed{P(M) = \frac{1+n^2}{(n+1)^2}}$

$P(N) = 1 - P(M) = 1 - \frac{1+n^2}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - (1+n^2)}{(n+1)^2}$

$= \frac{\cancel{n^2} + 2n \cancel{+1} \cancel{-1} - \cancel{n^2}}{(n+1)^2}$

$\boxed{P(N) = \frac{2n}{(n+1)^2}}$

2) a)

$X=k$	$X = -(n+1)^2$	$X = 2(n+1)^2$
$p(X=k)$	$\frac{1+n^2}{(n+1)^2}$	$\frac{2n}{(n+1)^2}$

b) $E(X) = -\cancel{(n+1)^2} \times \frac{n^2+1}{\cancel{(n+1)^2}} + 2 \times \cancel{(n+1)^2} \times \frac{2n}{\cancel{(n+1)^2}}$

$E(X) = -n^2 - 1 + 4n$.

$\boxed{E(X) = -n^2 + 4n - 1}$

c) Le jeu est favorable au joueur si son espérance est positive

$E(X) \geq 0$.

$-n^2 + 4n - 1 \geq 0$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 16 - 4 = 12 > 0$.

$n_1 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2 \times (-1)} \simeq 3{,}73$

n	0	1	3	$+\infty$
		(+)		

$n_2 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2 \times (-1)} \simeq 0{,}27$. Le jeu est favorable pour $n \in \{1; 2; 3\}$.

d) Il veut maximiser son profit donc on cherche n pour que $E(X)$ soit maximale.

$n = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \times (-1)} = 2$.

Il souhaite donc qu'il y ait dans l'urne deux boules blanches.

3) $E(X) = -2^2 + 4 \times 2 - 1 = -4 + 8 - 1$
$(E_X(2))$. $= 3$ €.

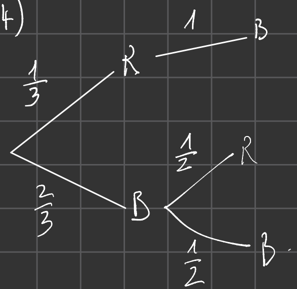
$X=k$	$X = -9$	$X = 18$
$p(X=k)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

$V(X) = \frac{5}{9} \times (-9-3)^2 + \frac{4}{9} \times (18-3)^2$.

$V(X) = 180$.

$V(aX) = a^2 V(X)$.

4)



5)

$Y=k$	$Y = -5$	$Y = 10$
$P(Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$E(Y) = \frac{1}{3} \times (-5) + \frac{2}{3} \times 10$.

$\boxed{E(Y) = 5 \text{ €}}$

$V(Y) = \frac{1}{3} \times (-5-5)^2 + \frac{2}{3} \times (10-5)^2$.

$V(Y) = 50$ €^{2}.

6) $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3 + 5$
$= 8$ €.

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 180 + 50$
$= 230$.

$E(5X+2Y) = E(5X) + E(2Y)$
$= 5 \times E(X) + 2 \times E(Y)$
$= 5 \times 3 + 2 \times 5 = 25$ €.

$V(5X+2Y) = V(5X) + V(2Y)$
$= 5^2 \times V(X) + 2^2 \times V(Y)$
$= 25 \times 180 + 4 \times 50$
$= 4700$.

Sommes de variables aléatoires – Fiche de cours

1. Variables aléatoires réelles (VAR)

a. Définition

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire.
On appelle variable aléatoire réelle X une fonction définie de $\Omega \to \mathbb{R}$

b. Opérations

Nous étudierons les opérations suivantes avec des variables aléatoires :

- multiplication par un réel par exemple : λX
- somme de 2 variables aléatoires par exemple : X+Y

c. Loi de probabilité

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction qui à chaque valeur x_i associe la probabilité de l'événement $P(X = x_i)$

On peut résumer les résultats dans un tableau

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

2. Espérance mathématique / écart type

a. Espérance mathématique

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} p_k \cdot x_k \qquad E(aX+b)=aE(X)+b \qquad E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

si E > 0 , l'expérience aléatoire est favorable
si E = 0 , l'expérience aléatoire est équitable
si E < 0 , l'expérience aléatoire est défavorable

b. Variance

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad V(X)=\sum_{k=0}^{n} p_k \cdot (x_k - E(X))^2 \qquad V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ pour X et Y variables indépendantes

$$V(aX)=V(aX+b)=a^2V(X)$$

c. Ecart type

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)} \quad ; \quad \sigma(aX)=\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

3. Application à la loi binomiale

a. Définition

Deux variables sont identiquement distribuées lorsqu'elles ont la même loi de probabilités

b. Espérance mathématique

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernouilli indépendantes et identiquement distribuées

c. Propriétés

Si X suit une loi de binomiale de paramètres n et p :

$$E(X)=np \qquad V(X)=np\cdot(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$$

4. Echantillons de n variables aléatoires

a. Définition

Un échantillon de taille n est une liste de résultats obtenus pour n répétitions identiques et indépendantes.

b. <u>Propriétés</u>

Soit X une variable aléatoire de moyenne E(X), de variance V(X) et d'écart type σ_X

Soient n variables aléatoires X_1, X_2, ...X_n distribuées identiquement suivant la même loi de probabilité

On appelle M_n la moyenne de l'échantillon définie par :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots X_n}{n}$$

On appelle $E(M_n)$ espérance mathématique de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$E(M_n) = E(X)$$

On appelle $V(M_n)$ la variance de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$V(M_n) = \frac{V(X_1) + V(X_2) + \dots V(X_n)}{n^2} \quad ; \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

On appelle $\sigma(M_n)$ l'écart type de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

Sommes de variables aléatoires – Exercices

Exercice 1 corrigé disponible

Voici trois lois de probabilités et trois couples d'espérance et d'écart type, associez-les sans justification.

<table>
<tr><th colspan="2">Loi de probabilité</th><th colspan="2">Espérance Écart type</th></tr>
<tr><td>A</td><td><table><tr><td>x_i</td><td>8</td><td>14</td></tr><tr><td>$p(X=x_i)$</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr></table></td><td>E</td><td>$E(X)=11 \quad \sigma(X)\approx 1{,}73$</td></tr>
<tr><td>B</td><td><table><tr><td>x_i</td><td>8</td><td>12</td></tr><tr><td>$p(X=x_i)$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{3}{4}$</td></tr></table></td><td>F</td><td>$E(X)=10 \quad \sigma(X)\approx 0{,}82$</td></tr>
<tr><td>C</td><td><table><tr><td>x_i</td><td>4</td><td>10</td><td>16</td></tr><tr><td>$p(X=x_i)$</td><td>$\frac{1}{100}$</td><td>$\frac{98}{100}$</td><td>$\frac{1}{100}$</td></tr></table></td><td>G</td><td>$E(X)=10 \quad \sigma(X)\approx 2{,}83$</td></tr>
</table>

Exercice 2 corrigé disponible

On considère deux dés fantaisistes dont les faces sont marquées de la façon suivante :

- le premier dé : 1, 2, 2, 3, 4, 4
- le deuxième dé : 1, 3, 4, 5, 6, 8

Soit X la variable aléatoire qui indique le numéro du premier dé
Soit Y la variable aléatoire qui indique le numéro du deuxième dé
Soit Z la variable aléatoire définie par Z=X+Y

1. A l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de (X,Y) et donner la valeur de Z.
2. Donner la loi de probabilité de Z=X+Y
3. Calculer E(X), E(Y), E(Z), V(X), V(Y) et V(Z)
4. Calculer $E(3X-2Y)$; $V(3X-2Y)$; $\sigma(3X-2Y)$

Exercice 3 corrigé disponible

Soit X et Y deux variables aléatoires et indépendantes dont les lois de probabilités sont données dans les tableaux ci-dessous :

x_i	-2	0	3	4
$p(X=x_i)$	0,4	0,2	0,3	0,1

y_i	-5	10	20
$p(Y=y_i)$	0,35	0,45	0,1

1) Calculer $E(X+Y)$.
2) $V(X+Y)$.
3) Déterminer une valeur approchée de $\sigma(X+Y)$ à 10^{-2} près.

Exercice 4 corrigé disponible

Une urne contient une boule rouge et n boules blanches.
On tire **successivement et avec remise** deux boules de l'urne.

1. Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants :
   M : « Les deux boules sont de la même couleur »
   N : « Les deux boules sont de couleur différente »
2. On considère le jeu suivant : le joueur perd $(n+1)^2$ euros si M est réalisé et gagne $2(n+1)^2$ euros sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Démontrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.

   Pour les questions suivantes toute trace de recherche et de raisonnement seront pris en compte.

   (c) Pour quelles valeurs de n le jeu est favorable au joueur ?
   (d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ?

On suppose que n=2 boules blanches

3. Calculer E(X) et V(X)
4. On considère les événements suivants :
   M : tirer simultanément 2 boules de la même couleur
   N : tirer simultanément 2 boules de couleur différentes
   Déterminer P(M) et P(N)

Soit Y la variable aléatoire qui est égale au gain algébrique (positif ou négatif du joueur) . Si M est réalisé le joueur perd 5 euros, si N est réalisé le joueur gagne 10 euros

5. Calculer E(Y) et V(Y)
6. Calculer E(X+Y) , V(X+Y), E(5X+2Y) et V(5X+2Y)

Exercice 5 corrigé disponible

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de $15km.h^{-1}$.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$.
Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.

1) Déterminer la loi de probabilités de X.
2) Exprimer T en fonction de X.
3) Déterminer $E(T)$ et interpréter ce résultat.
4) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
   a. Peut-il espérer être à l'heure ?
   b. Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

Exercice 6 corrigé disponible

Une agence de location de voiture dispose de trois voitures qu'elle loue à la journée.

On admet que la demande journalière de véhicules est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,22	0,37	0,24	0,10	0,05	0,02

On suppose que tous les véhicules sont en état de marche. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Calculer l'espérance et la variance de Y.

3. Le prix de location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.

a. Exprimer la variable aléatoire B égale au bénéfice journalier en fonction de Y.

b. Calculer l'espérance et la variance de B.

Exercice 7 corrigé disponible

Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré trois fois successivement, puis une pièce de monnaie non truquée cinq fois successivement.
On gagne autant d'euros que le numéro inscrit sur le dé, et un euro quand on obtient pile.
Pour tout entier k compris entre 1 et 3, on note X_k la variable aléatoire qui, au k-ième lancer du dé, associe le gain obtenu et, pour tout entier i compris entre 1 et 5, Y_i la variable aléatoire qui, au i-ième lancer de la pièce, associe le gain obtenu.

1. Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

2. Calculer $E(Y_i)$ et $V(Y_i)$.

3. Soit Z la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur.

a. Exprimer Z en fonction des variables X_k et Y_i.

b. En déduire l'espérance et la variance de Z.

Exercice 8 corrigé disponible

Soit X une variable aléatoire d'espérance 5 et d'écart-type 2.
Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n (respectivement M_n) la variable aléatoire somme (resp. moyenne) d'un échantillon de taille n de X.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

a. L'espérance de S_{10} est 50.

b. La variance de M_{100} est 0,2.

c. L'écart-type de S_{400} est 40.

d. L'espérance de $M_{50} - 50$ est 0.

Exercice 9 corrigé disponible

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers Ω.

À partir des informations données à chaque ligne, recopier et compléter le tableau ci-dessous.

$V(X)$	$V(Y)$	$V(X+Y)$	$V(3X-Y)$
1,4		3	
2,8			39,4
		11,4	53,8

Exercice 10 corrigé disponible

On dispose d'un jeu de 52 cartes comme ci-dessus et on prélève une carte au hasard dans le paquet.

On s'intéresse à deux aspects de la carte.

› Sa couleur :
- si la carte est un cœur, on gagne 10 points ;
- si la carte est un trèfle, on gagne 2 points ;
- dans les autres cas, on perd 15 points ;

› Sa valeur :
- si la carte est une figure (valet, dame ou roi), on gagne 5 points ;
- si la carte est un as, on gagne 2 points ;
- si la carte est un 2 ou un 10, on gagne 1 point ;
- si la carte est un 5, on ne gagne pas de point ;
- dans les autres cas, on perd 1 point.

Soit Z la variable aléatoire correspondant au nombre de points remportés au total.

1. On note X et Y les variables aléatoires correspondant au nombre de points obtenus en regardant respectivement la couleur et la valeur de la carte.

a. Exprimer Z en fonction de X et Y.

b. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y.

c. En déduire $E(Z)$ puis $\sigma(Z)$. On arrondira à 10^{-4} près.

2. On joue cinq fois de suite à ce jeu, en remettant systématiquement la carte obtenue dans le paquet et en mélangeant de nouveau les cartes.
Pour tout entier $k \in \{1 ; \ldots ; 5\}$, on note Z_k la variable aléatoire correspondant au nombre de points obtenus au k^e tirage.
Soit S la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus à l'issue de la partie.

a. Exprimer S en fonction des variables Z_k.

b. Calculer $E(S)$ puis interpréter le résultat obtenu.
Calculer $\sigma(S)$. On arrondira à 10^{-4} près.

c. On pose enfin la variable aléatoire $M = \frac{Z_1 + \ldots + Z_5}{5}$.
À quoi la variable aléatoire M correspond-elle ?
Calculer $\sigma(M)$. On arrondira à 10^{-4} près.

Exercice 11

Afin de réguler le trafic automobile, le maire d'une commune a décidé de régler les trois feux de la voie principale de manière à obtenir les résultats suivants :

- 80 % des automobilistes doivent s'arrêter au premier feu ;
- 30 % des automobilistes doivent s'arrêter au second feu ;
- 65 % des automobilistes doivent s'arrêter au troisième feu.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux auxquels s'arrête un automobiliste pris au hasard.

1. Justifier qu'on peut écrire $X = X_1 + X_2 + X_3$ où, pour tout $k \in \{1 ; 2 ; 3\}$, X_k est la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'automobiliste s'est arrêté au feu k et 0 sinon.

2. Déterminer les lois de probabilité des trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3.

3. En déduire $E(X)$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 12

Dans un jeu de Scrabble®, on compte 102 jetons parmi lesquels figurent deux jokers (valant 0 point) et les différentes lettres de l'alphabet dont les valeurs et les occurrences sont répertoriées dans le tableau suivant :

A_1	B_3	C_3	D_2	E_1	F_4	G_2	H_4	I_1	J_8	K_{10}	L_1	M_2
9	2	2	3	15	2	2	2	8	1	1	5	3

N_1	O_1	P_3	Q_8	R_1	S_1	T_1	U_1	V_4	W_{10}	X_{10}	Y_{10}	Z_{10}
6	6	2	1	6	6	6	6	2	1	1	1	1

Lors du premier tour, on tire au hasard sept jetons du sac. On suppose qu'on peut assimiler cette expérience à un tirage avec remise.

Pour tout entier $k \in \{1 ; \ldots ; 7\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de points attribués par le jeton tiré au k^e tirage, et on note S_7 la variable aléatoire définie par $S_7 = X_1 + X_2 + \ldots + X_7$.

1. Interpréter la variable aléatoire S_7 dans le cadre de l'exercice.

2. Déterminer $E(S_7)$ et interpréter le résultat obtenu.

3. On pose la variable aléatoire M_7 définie par
$M_7 = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_7}{7}$.
Calculer $E(M_7)$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 13

Une loterie comporte un très grand nombre de billets valant chacun 1 €.
Parmi ces billets, 0,2 % sont des billets gagnants à 100 €, 1 % à 50 €, 2 % à 10 € et les autres sont perdants.
Manon, qui est la première à choisir ses billets, en prend 3 au hasard.
On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique d'un ticket et S la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Manon.

1) Donner un argument permettant de considérer que les 3 billets de Manon sont le résultat d'un tirage avec remise.
2) Sous cette condition, donner la loi de X et calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\sigma(X)$.
3) En déduire le gain que pourrait espérer en moyenne Manon en tirant 3 billets et l'écart-type de S.