n°18 1)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$x_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\,dt$ $\quad y_n = \int_0^1 t^n \sin(t)\,dt$.

1)a) Soit $t \in [0;1]$, $\cos(t) \geq 0$.

$t^n \cos(t) \geq 0$

$\int_0^1 t^n \cos(t) \geq 0$.

$x_n \geq 0$.

(x_n) est donc à termes positifs.

1)b) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t \in [0;1]$,

$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1}\cos(t)dt - \int_0^1 t^n \cos(t)dt$

$= \int_0^1 \left(t^{n+1}\cos(t) - t^n\cos(t)\right) dt$

$= \int_0^1 \underbrace{t^n \cos(t)}_{+} \underbrace{(t-1)}_{-}\, dt \leq 0$.

$t < 1$

$t - 1 < 0$

(x_n) décroissante.

c) Décroissante et minorée donc convergente.

2)a) $t \in [0;1]$, $\cos(t) \leq 1$

$\iff t^n \cos(t) \leq t^n$.

$\iff \int_0^1 t^n \cos(t)dt \leq \int_0^1 t^n dt$

$\iff x_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\iff \boxed{x_n \leq \frac{1}{n+1}}$

2)c) D'une part : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$

D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3)a) IPP : $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\cos(t)\,dt$.

$u(t) = t^{n+1}$ $\quad v(t) = \sin(t)$.

$u'(t) = (n+1)\times t^n$ $\quad v'(t) = \cos(t)$

$x_{n+1} = \left[t^{n+1}\times \sin(t)\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \sin(t)dt$.

$x_{n+1} = 1^{n+1}\times\sin(1) - 0^{n+1}\times\sin(0) - (n+1)\int_0^1 t^n\sin(t)dt$.

$\boxed{x_{n+1} = \sin(1) - (n+1)\times y_n}$

3)b) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = 0$.

H_1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ ou $l > 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = -\infty$ impossible.

H_2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$ ou $l < 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = +\infty$ impossible.

H_3 : y_n n'a pas de limite $\Rightarrow (x_n)$ n'a pas de limites ce qui est faux. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

$\iff (n+1)y_n = -x_{n+1} + \sin(1)$.

On $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n y_n = \sin(1)$

De même, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

$y_{n+1} = nx_n + x_n - \cos(1)$.

$nx_n = y_{n+1} - x_n + \cos(1)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+1} - x_n + \cos(1) = \cos(1)$.

n°20 : $g(x) = e^x - x$ $\quad x \in [0;n]$.

$g'(x) = e^x - 1$.

$g'(x) \geq 0$

$e^x \geq 1$

$x \geq 0$.

x	0		n
$g'(x)$		$+$	
g	1	$\nearrow$	

$\forall x \in [0;n]$, $g(x) \geq 1 > 0$.

d'où $e^x - x > 0$

$\frac{x}{e^x - x} > 0$ $\quad (V_n)$ est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{e^x - x}\,dx > 0$

Soit $x \in [0;+\infty[$.

2)a) $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$

$e^x - \frac{e^x}{2} - x \geq 0$

$\frac{1}{2}e^x - x \geq 0$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$h(x) = \frac{1}{2}e^x - x$.

Dresser le tableau de variation de h

$h'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1. \geq 0$

$e^x > 2$.

$x > \ln(2)$.

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$\forall x \in [0;+\infty[$, $h(x) \geq 0$.

$\iff e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$.

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$ $\quad \times \frac{1}{x}$

$\frac{e^x - x}{x} \geq \frac{e^x}{2x}$

$\frac{x}{e^x - x} \leq \frac{2x}{e^x}$.

$\frac{x}{e^x - x} \leq 2xe^{-x}$

$\int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx \leq \int_0^n 2xe^{-x}\,dx$

$V_n \leq \int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

c) $\int_0^n 2x e^{-x} \, dx$

$u(x) = 2x \qquad v(x) = -e^{-x}$

$u'(x) = 2 \qquad v'(x) = e^{-x}$

$= -\left[2x e^{-x}\right]_0^n - \int_0^n -2 e^{-x} \, dx$

$= -2n e^{-n} + 2 \int_0^n e^{-x} \, dx$

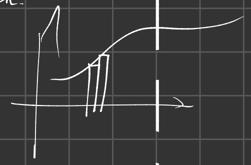
$= -2n e^{-n} - 2 \times \left[e^{-x}\right]_0^n$

$= -2n e^{-n} - 2 \times \left(e^{-n} - e^{-0}\right)$

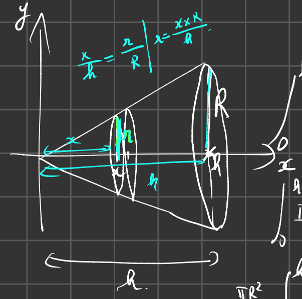
$= -2n e^{-n} - 2e^{-n} + 2$

Éloquent. → poétique.

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$



$\frac{x}{h} = \frac{r}{R} \quad \Big| \quad r = \frac{x \times R}{h}$



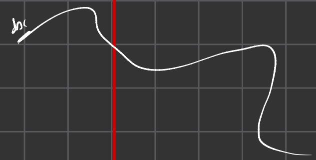
$\int_0^h \pi \times r^2 \times dx$

$\int_0^h \frac{\pi \times R^2}{h^2} \times x^2 \, dx$

$\frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 \, dx$

$\frac{1}{3} \times \frac{\pi R^2}{h^2} \times \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$

$\frac{\pi R^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$



Calcul intégral – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

1. **(a)** Etudier pour tout $x \in]0;+\infty[$, les variation de (I_n). $I_{n+1} - I_n$
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$ $\forall x \in [n;n+1]$,
   Conclure sur la nature de la suite
2. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{n+1} < I_n < \frac{1}{n}$
3. En déduire la limite de I_n.

Exercice 2 **corrigé disponible**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{\pi/4} x^n \sin(2x) dx$. On ne cherchera pas à calculer I_n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

2. Quelle est la limite de I_n ?

Exercice 3 **corrigé disponible**

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} 4e^t dt$ **(b)** $\int_0^1 te^{t^2-1} dt$ **(c)** $\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1} dt$

Exercice 4 **corrigé disponible**

1. Déterminer a, b et c tel que pour tout x ≠ -2 :

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2. En déduire $I = \int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$

Exercice 5 **corrigé disponible**

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_0^4 (t-3) dt$ **(b)** $\int_4^{-1} (t^2 - 4t) dt$ **(c)** $\int_1^2 \left(t^2 - \frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 6 **corrigé disponible**

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) dt$ **(b)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) dt$ **(c)** $\int_0^{\pi} (\sin(2t)) dt$

Exercice 7 **corrigé disponible**

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^1 e^{1-2x} dx$

2. $J = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx$

3. $K = \int_0^1 \cos(x) e^{\sin(x)} dx$

4. $L = \int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4} dx$

5. $M = \int_0^1 5^x dx$

6. $N = \int_0^{1/2} \frac{3x}{1-x^2} dx$

7. $O = \int_0^1 x(x^2+2) dx$

8. $P = \int_{-1}^2 3^x dx$

Exercice 8 **corrigé disponible**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. Vérifier que pour tout x, $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale, $J = \int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 9 corrigé disponible

1. (a) Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x(\ln x-1)$.
Calculer $f'(x)$ pour tout x >0.

(b) En déduire $\int_1^e \ln x dx$.

2. Montrer que l'on a $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1}dt=\ln\sqrt{\frac{e^2+1}{2}}$

Exercice 10 corrigé disponible

On se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'intégrale $L=\int_0^1 f(x)dx$ où f est la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=\frac{e^{-x}}{2-x}$

1. Démontrer que pour tout x ∈ [0 ; 1] :

$$\frac{1}{e}\leq f(x)\leq\frac{1}{2}$$

2. Soient J et K les intégrales définies par :

$$J=\int_0^1 (2+x)e^{-x}dx \quad ; \quad K=\int_0^1 x^2 f(x)dx$$

(a) Calculer J et montrer que $J=3-4e^{-1}$.

(b) Utiliser l'encadrement de la question *1.* pour démontrer que :

$$\frac{1}{3e}\leq K\leq\frac{1}{6}$$

(c) Démontrer que $J + K = 4L$.

(d) En déduire un encadrement de L, puis donner une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

Exercice 11

On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n=\int_0^1 t^n\cos t dt$$

1. (a) Montrer que la suite (x_n) est à terme positifs.

(b) Montrer que tout $n\in\mathbb{N}$ et pour $t\in[0;1]$ on $t^{n+1}\cos t\leq t^n\cos t$.

(c) En déduire les variations de la suite (x_n).

(d) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $x_n\leq\frac{1}{n+1}$.

(b) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n=\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n\geq 0$.

2. (a) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n :

$$(1-t)^n e^t\leq e\times(1-t)^n$$

(b) En déduire que pour tout n ∈ℕ, $u_n\leq\frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 13

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I=\int_1^6 \frac{1}{(x-3)^3}dx \qquad J=\int_{-1}^4 \frac{1}{3x+5}dx \qquad K=\int_{-1}^1 xe^{3x^2-1}dx$$

Exercice 14

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3}dx$$

Exercice 15 corrigé disponible

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$$

1.a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$

1.b. Montrer que $u_1 = 1 + \ln\frac{2}{1+e}$ et en déduire u_0

2.a. Montrer pour tout entier naturel que $u_n \geq 0$

2.b. Montrer pour tout entier naturel non nul que $u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}$

2.c. En déduire que pour tout entier naturel non nul $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$

3. Prouver que (u_n) converge vers une limite à déterminer

Exercice 16 corrigé disponible

Calculer les intégales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1) $I = \int_1^e x \ln x \,\mathrm{d}x$

2) $I = \int_1^{e^2} \ln t \,\mathrm{d}t$

3) $I = \int_0^{\pi} (x-1)\cos x \,\mathrm{d}x$

4) $I = \int_0^1 (x+2)e^x \,\mathrm{d}x$

5) $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t} \,\mathrm{d}t$

6) $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \,\mathrm{d}x$

Exercice 17

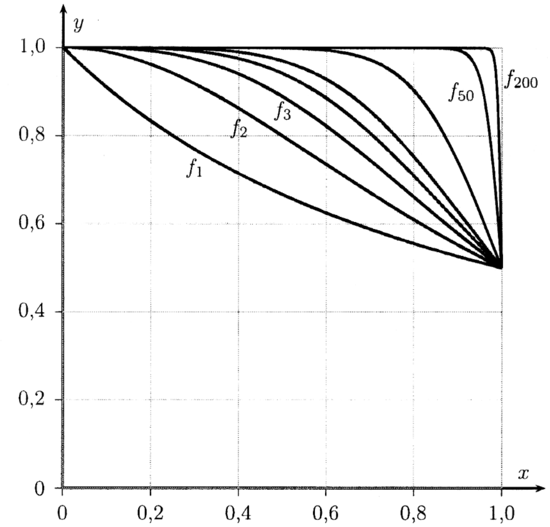
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$

Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

1. a) En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de la suite (I_n).
   b) Démontrer cette conjecture.
2. Calculer la valeur exacte de I_1.
3. a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0~;~1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$
   b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.
4. Démontrer que, pour tout réel $x \in [0~;~1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$.
5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x$.
6. À l'aide des questions précédentes, encadrer I_n pour tout entier naturel $n \geq 1$, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.



Exercice 18

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

1) a) Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b) Étudier les variations de la suite (x_n).

c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite, (x_n) ?

2) a) Démontrer que, pour tour entier naturel n non nul :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire la limite de la suite (x_n).

3) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$

Exercice 19

Étude de la suite (u_n) définie par pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^n f(x)\,dx$

On ne cherchera pas à calculer explicitement u_n.

1. Donner une interprétation géométrique de u_n.
2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. a. Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{e^x - x}$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = n + \int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx.$$

c. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 20

Étude de la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n$

On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = \int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx$.

On se propose d'étudier la convergence de la suite (v_n).

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. a. Montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2}$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

   c. En effectuant une intégration par parties, exprimer $\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$ en fonction de n.

   d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 2$.
3. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Exercice 21

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

1. (a) Etudier les variations de f sur $]0\ ;+\infty[$

   (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$

Soient les fonctions g et h définies sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et

$h(x) = \ln x + 1$.

Soit C_g et C_h leurs courbes représentatives.

2. (a) Représenter C_g et C_h. Quelles sont les coordonnées de I, intersection de C_h avec l'axe des abscisses ?

   (b) On note A l'aire du domaine délimité par C_g et C_h et les droites d'équation $x = e^{-1}$ et $x = 1$. Déterminer A.

Exercice 22

On considère les fonctions $f: x \mapsto \frac{4x-x^2}{(x-2)^2}$ et $g: x \mapsto 4x - x^2$ sur $]2;+\infty[$.

1) Etudier les positions relatives des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2) Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan compris entre les deux courbes et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 5$.

Exercice 23

A l'aide d'une double intégration par parties, calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{t} \cos(t)dt \qquad B = \int_{0}^{\pi} e^{-t} \sin(t)dt \qquad C = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t} \cos(6t)dt$$

Exercice 24

On désigne par n un entier relatif différent de –1.

1. Calculer l'intégrale : $I_n = \int_1^e t^n \ln t \, dt$.
2. En déduire le calcul de l'intégrale : $J_n = \int_1^e t^n (\ln t)^2 \, dt$.

Exercice 25

On désigne par n un entier naturel, on pose : $\int_0^n t^2 e^{-t} dt$

1. Calculer I_n en fonction de n.
2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} I_n$