

1) a)

$$3a) \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{r} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'une part $\vec{n} \cdot \vec{r} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$

D'autre part $\vec{n} \cdot \vec{c} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2 \neq 0$

\vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FK)

donc $\vec{n} \perp (FK)$.

3) b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal à (CFK), d'où :

$$(CFK) \quad x + 2y + z + d = 0 \quad \text{ou d'HR}$$

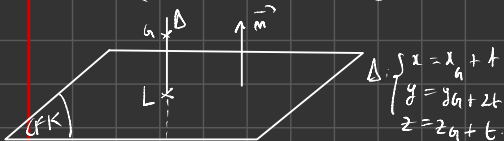
Déterminons d. $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (CFK)$ d'où :

$$1 + 2 + 0 + d = 0$$

$$d = -3$$

D'où : (CFK) : $x + 2y + z - 3 = 0$.

4. Le vecteur \vec{n} est normal à (CFK) $\left. \begin{array}{l} (\Delta) \perp (CFK) \\ \vec{n} \text{ charge } \Delta \end{array} \right\}$



$$\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases}$$

5) a) On cherche les coordonnées de $L = (CFK) \cap \Delta$

$$(CFK): x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases}$$

$$1+t + 2(1+2t) + 1+t - 3 = 0$$

$$1+t + 2 + 4t + 1+t - 3 = 0$$

$$6t + 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{6}$$

D'où $L \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{6} \\ 1 + 2 \times \frac{1}{6} \\ 1 + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$L \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix} \quad G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. $(A; \vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AE})$ est un repère orthonormé direct. D'où :

$$LG = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{6}\right)^2}$$

$$LG = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{16}{9} + \frac{1}{36}}$$

$$LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

6) $V = \frac{1}{3} \times \text{aire}(CFK) \times LG$

$$\text{aire}(CFK) = \frac{r \times 3}{LG} = \frac{1}{\frac{1}{6}} \times 3$$

$$\text{aire}(CFK) = \frac{1}{2} \times \frac{6^3}{\sqrt{6}} = \frac{3 \times 6^2}{2 \sqrt{6} \times 6} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

ad.

1) $f(x) = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$$

f admet une asymptote horizontale d'éq. $y = 0$.

2) f est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$. D'où :

$$f(x) = x e^{-x} = u(x) \times v(x)$$

où $u(x) = x$

$v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1$

$v'(x) = -e^{-x}$

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$$

$$= e^{-x} - e^{-x} \times x$$

$$= e^{-x} (1 - x)$$

3) Dressons le tableau de variations de f à l'aide du signe de f'

$$e^{-x} (1 - x) = 0$$

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$\text{Var } f$	0	\nearrow	\searrow

- f est continue sur $[0; 1]$

- f est strictement croissante sur $[0; 1]$

- $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{e}$

or $\frac{367}{1000} \in [0; \frac{1}{e}]$

Alors d'après le corollaire du théorème

des valeurs intermédiaires, f admet une unique

solution à l'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$

sur $[0; 1]$

De même, on démontre que $f(x) = \frac{367}{1000}$ admet une unique solution sur $(1; +\infty[$.

Loi des grands nombres - Fiche de cours

1. L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev

a. Variable aléatoire positive

Une variable aléatoire est dite positive ou nulle dans un univers Ω lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des nombres réels positifs ou nuls.

b. L'inégalité de Markov

X est une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance

$$E(X) ; \quad \forall a > 0 \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

X obtenir le bac
X=0 à X=18
(17)
P(X ≥ 15)

c. L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

2. Loi des grands nombres

a. L'inégalité de concentration

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$

On appelle M_n la variable moyenne avec $M_n = \frac{1}{n} \sum X_i$

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{na^2}$$

b. Loi faible des grands nombres

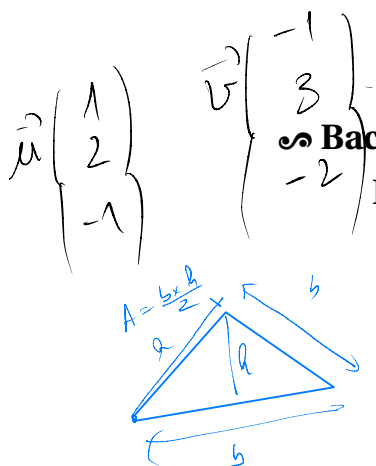
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$

Baccalauréat Nouvelle-Calédonie 29 août 2023 Jour 2
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices



EXERCICE 1 5 points

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.

On note K le milieu du segment [HG].

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.

1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.
2.
 - a. Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.
 - b. Calculer l'aire du triangle FGC.
 - c. Calculer le volume du tétraèdre FGCK.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h,$$

où \mathcal{B} est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

3.
 - a. On note \vec{n} le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que \vec{n} est normal au plan (CFK).

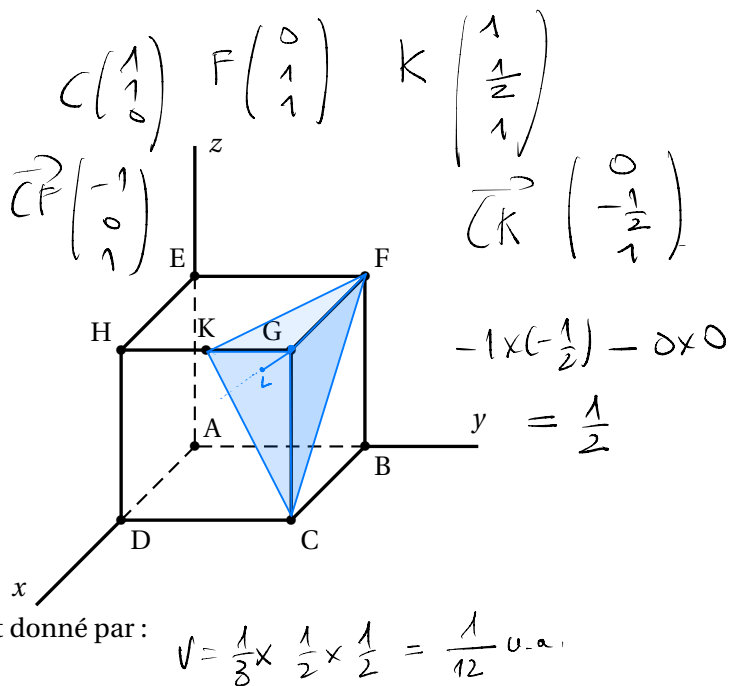
- b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est :

$$x + 2y + z - 3 = 0.$$

4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).

Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$



5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).
- Déterminer les coordonnées du point L.
 - En déduire que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.
6. En utilisant la question 2., déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

EXERCICE 2 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x e^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0; +\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

démontrer que la courbe \mathcal{C}_f possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = (1 - x) e^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. Déterminer, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

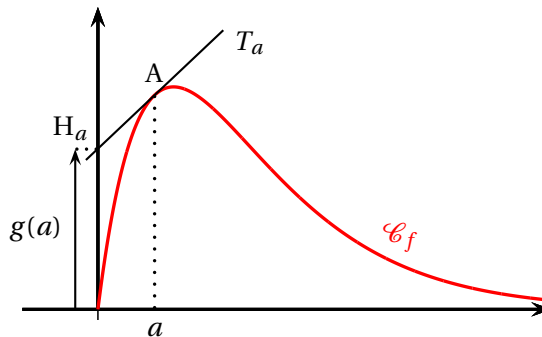
$$f(x) = \frac{367}{1000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$:

$$f''(x) = e^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

6. Soit a un réel appartenant à $[0; +\infty[$ et A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a .
On note T_a la tangente à \mathcal{C}_f en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a .
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



- a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = [(1 - a) e^{-a}] x + a^2 e^{-a}.$$

- b. En déduire l'expression de $g(a)$.
 c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 3 5 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

- Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
- On considère la fonction terme ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « i in range (n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

- Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n.$$

- En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

- Donner v_0 .

- b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
 c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n+0,5} - 2.$$

- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 4 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 1. et 2.

Les 200 adhérents d'un club sont des filles ou des garçons. Ces adhérents pratiquent l'aviron ou le basket selon la répartition figurant dans le tableau ci-dessous.

	Aviron	Basket	Total
Filles	25	80	105
Garçons	50	45	95
Total	75	125	200

On choisit un adhérent au hasard et on considère les événements suivants :

F : l'adhérent est une fille;

A : l'adhérent pratique l'aviron.

1. La probabilité de F sachant A est égale à :

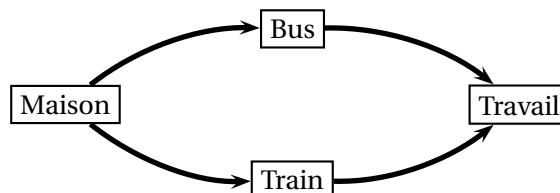
a. $\frac{25}{100}$ b. $\frac{25}{75}$ c. $\frac{25}{105}$ d. $\frac{75}{105}$

2. La probabilité de l'évènement $A \cup F$ est égale à :

a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{31}{40}$ d. $\frac{5}{36}$

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 3. et 4.

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.



La probabilité que le bus soit en panne est égale à b .

La probabilité que le train soit en panne est égale à t .

Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

3. La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est égale à :

- a. $p_1 = bt$ b. $p_1 = 1 - bt$ c. $p_1 = b + t$ d. $p_1 = b + t - bt$

4. La probabilité p_2 que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

- a. $p_2 = bt$ b. $p_2 = 1 - bt$ c. $p_2 = b + t$ d. $p_2 = b + t - bt$

5. On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x .

On lance la pièce n fois. Les lancers sont indépendants.

La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est égale à

- a. $p = x^n$ b. $p = (1 - x)^n$ c. $p = 1 - x^n$ d. $p = 1 - (1 - x)^n$

☞ **Baccalauréat Nouvelle-Calédonie 28 août 2023 Jour 1** ☞**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices

EXERCICE 1 5 points

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.

On sait que :

- 60 % des clients choisissent un bateau à voile; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE.
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les événements :

- V : « le client choisit un bateau à voile »;
- L : « le client prend l'option PILOTE ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à 0,30.
4. En déduire $P_{\overline{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.

Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile? Arrondir à 0,01 près.

Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à 0,12. Cette probabilité n'est que de 0,005 si le client prend l'option PILOTE. On considère un client. On note A l'évènement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P(\overline{L} \cap A)$.
2. L'entreprise loue 1 000 bateaux.
À combien d'avaries peut-elle s'attendre?

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.

On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

EXERCICE 2 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1.
 - a. Démontrer que $u_1 = 12$.
 - b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 - c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.
 - a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
 - b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 3 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse fautive, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x+1)e^x$.

Une primitive F de f sur \mathbb{R} est définie par :

a. $F(x) = 1 + x e^x$

b. $F(x) = (1+x)e^x$

c. $F(x) = (2+x)e^x$

d. $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x$.

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

2. On considère les droites (d_1) et (d_2) dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1) \begin{cases} x = 2+r \\ y = 1+r \\ z = -r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (d_2) \begin{cases} x = 1-s \\ y = -1+s \\ z = 2-s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont :

a. sécantes.

b. strictement parallèles.

c. confondues.

d. non coplanaires.

3. On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est :

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2+u \\ y = 4+u \\ z = 1-u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R})$$

La droite (Δ) est :

a. sécante et non orthogonale au plan (P) .

b. incluse dans le plan (P) .

c. strictement parallèle au plan (P) .

d. orthogonale au plan (P) .

4. On considère le plan (P_1) dont une équation cartésienne est $x - 2y + z + 1 = 0$, ainsi que le plan (P_2) dont une équation cartésienne est $2x + y + z - 6 = 0$.

Les plans (P_1) et (P_2) sont :

- a. sécants et perpendiculaires. b. confondus.
c. sécants et non perpendiculaires. d. strictement parallèles.

5. On considère les points E(1 ; 2 ; 1), F(2 ; 4 ; 3) et G(-2 ; 2 ; 5).

On peut affirmer que la mesure α de l'angle \widehat{FEG} vérifie :

- a. $\alpha = 90^\circ$ b. $\alpha > 90^\circ$ c. $\alpha = 0^\circ$ d. $\alpha \approx 71^\circ$

EXERCICE 4 5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a. Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

- b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe \mathcal{C}_f est au-dessus de ses tangentes.
- c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
(On admettra que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. a. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
5. a. En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

- b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f .