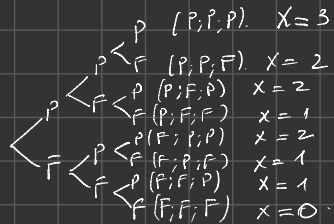


Variable aléatoire : une variable aléatoire est une fonction

mathématique qui associe à chaque issue d'une expérience aléatoire un unique réel.

Ex: On lance 3 fois de suite une pièce et on note dans l'ordre les résultats.



Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de pile.

Loi de probabilité

X=k	X=0	X=1	X=2	X=3
P(X=k)	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot x_i = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = 1,5$$

x+1	x+1	x+1
X=0	X=1	X=13
1/13	1/13	1/13

$$E(X) = \frac{1}{13} \times (0+1+\dots+13)$$

$$E(X) = \frac{1}{13} \times 14 \times \frac{0+13}{2}$$

$$E(X) = 7$$

$$E(a \cdot X) = a \cdot X \cdot E(X)$$

$$E(X+b) = E(X) + b$$

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

$$E(X) = \sum p_i \cdot x_i$$

$$E(aX+b) = \sum_{i=0}^n p_i \cdot (aX_i+b)$$

$$= \sum_{i=0}^n a p_i X_i + b p_i$$

$$= a \sum_{i=0}^n p_i X_i + b \sum_{i=0}^n p_i$$

$$= a \sum_{i=0}^n p_i X_i + b \sum_{i=0}^n p_i$$

$$= a E(X) + b$$

$$CM = \left(1 + \frac{1}{10}\right)$$

$$1^1 = 1 + \frac{10}{100}$$

Adam

$$(20; 0)$$

10

(-)

$$\frac{(20-10)^2 + (0-10)^2}{2}$$

$$V(X) = 100$$

$$\sqrt{V(X)} = \sqrt{100} = 10$$

Malina

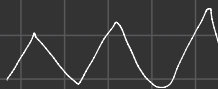
$$(10; 10)$$

10

(+)

$$\frac{(10-10)^2 + (10-10)^2}{2}$$

$$V(X) = 0$$



Juget 0. n=3.

4) Loi de X1

X1=k	X1=0	X1=1
P(X1=k)	0,2	0,8

$$E(X_1) = 0,2 \times 0 + 0,8 \times 1$$

$$E(X_1) = 0,8$$

5) Loi de X2

X2=k	X2=0	X2=1
P(X2=k)	0,5	0,5

$$E(X_2) = 0,5 \times 0 + 0,5 \times 1 = 0,5$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 0,8 + 0,5 = 1,3$$

Un élève pour au hasard obtient 1,3 point à l'exercice 1.

$$5/a) P(X=0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$$

$$P(X=2) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$$

$$P(X=1) = 1 - (P(X=2) + P(X=0)) = 1 - (0,48 + 0,18) = 0,34$$

$$P(X=1) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0,1 = 0,32 + 0,02 = 0,34$$

X	X=0	X=1	X=2
P(X=k)	0,18	0,34	0,48

$$V(X) = 0,18 \times (0-1,3)^2 + 0,34 \times (1-1,3)^2 + 0,48 \times (2-1,3)^2 = 0,57$$

$$b) V(X) = 0,2 \times (0-0,8)^2 + 0,8 \times (1-0,8)^2 = 0,16$$

$$V(X_2) = 0,5 \times (0-0,5)^2 + 0,5 \times (1-0,5)^2 = 0,25$$

$$V(X_1) + V(X_2) = 0,16 + 0,25 = 0,41 \neq V(X)$$

Le n'est pas simplement compte tenu du fait que X1 et X2 ne sont pas indépendantes.

1) L'expérience est un schéma de  
Bernoulli

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{3/4} B \\ \xleftarrow{1/4} B \end{array}$$

qui est répétée 8 fois de manière  
indépendante et identique, alors la  
variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre  
de succès répétés suit la loi binomiale  
de paramètres  $B(8; \frac{3}{4})$ .

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} 2) P(X=8) &= \binom{8}{8} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0,100. \end{aligned}$$

# Sommes de variables aléatoires – Fiche de cours

## 1. Variables aléatoires réelles (VAR)

### a. Définition

Soit  $\Omega$  un univers associé à une expérience aléatoire.

On appelle variable aléatoire réelle  $X$  une fonction définie de  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

### b. Opérations

Nous étudierons les opérations suivantes avec des variables aléatoires :

- multiplication par un réel par exemple :  $\lambda X$
- somme de 2 variables aléatoires par exemple :  $X+Y$

### c. Loi de probabilité

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  la fonction qui à chaque valeur  $x_i$  associe la probabilité de l'événement  $P(X = x_i)$

On peut résumer les résultats dans un tableau

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

## 2. Espérance mathématique / écart type

### a. Espérance mathématique

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$$
$$E(X) = \sum_{k=0}^n p_k \cdot x_k \quad E(aX+b) = aE(X)+b \quad E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

- si  $E > 0$ , l'expérience aléatoire est favorable
- si  $E = 0$ , l'expérience aléatoire est équitable
- si  $E < 0$ , l'expérience aléatoire est défavorable

### b. Variance

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad V(X) = \sum_{k=0}^n p_k \cdot (x_k - E(X))^2 \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \quad \text{pour } X \text{ et } Y \text{ variables indépendantes}$$
$$V(aX) = V(aX+b) = a^2 V(X)$$

### c. Ecart type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \quad ; \quad \sigma(aX) = \sigma(aX+b) = |a| \sigma(X)$$

## 3. Application à la loi binomiale

### a. Définition

Deux variables sont identiquement distribuées lorsqu'elles ont la même loi de probabilités

### b. Espérance mathématique

Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernouilli indépendantes et identiquement distribuées

### c. Propriétés

Si  $X$  suit une loi de binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  :

$$E(X) = np \quad V(X) = np \cdot (1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

## 4. Echantillons de $n$ variables aléatoires

### a. Définition

Un échantillon de taille  $n$  est une liste de résultats obtenus pour  $n$  répétitions identiques et indépendantes.

### b. Propriétés

Soit  $X$  une variable aléatoire de moyenne  $E(X)$ , de variance  $V(X)$  et d'écart type  $\sigma_X$

Soient  $n$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  distribuées identiquement suivant la même loi de probabilité

On appelle  $M_n$  la moyenne de l'échantillon définie par :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

On appelle  $E(M_n)$  espérance mathématique de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$E(M_n) = E(X)$$

On appelle  $V(M_n)$  la variance de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$V(M_n) = \frac{V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)}{n^2} \quad ; \quad V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

On appelle  $\sigma(M_n)$  l'écart type de la moyenne de l'échantillon définie par :

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

# Sommes de variables aléatoires – Exercices

## Exercice 1 corrigé disponible

Voici trois lois de probabilités et trois couples d'espérance et d'écart type, associez-les sans justification.

Loi de probabilité			Espérance Écart type	
A	$x_i$	8    14	E	$E(X) = 11$ $\sigma(X) \approx 1,73$
	$p(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$		
B	$x_i$	8    12	F	$E(X) = 10$ $\sigma(X) \approx 0,82$
	$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$		
C	$x_i$	4    10    16	G	$E(X) = 10$ $\sigma(X) \approx 2,83$
	$p(X = x_i)$	$\frac{1}{100}$ $\frac{98}{100}$ $\frac{1}{100}$		

## Exercice 2 corrigé disponible

On considère deux dés fantaisistes dont les faces sont marquées de la façon suivante :

- le premier dé : 1, 2, 2, 3, 4, 4
- le deuxième dé : 1, 3, 4, 5, 6, 8

Soit  $X$  la variable aléatoire qui indique le numéro du premier dé  
 Soit  $Y$  la variable aléatoire qui indique le numéro du deuxième dé  
 Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = X + Y$

1. A l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de  $(X, Y)$  et donner la valeur de  $Z$ .
2. Donner la loi de probabilité de  $Z = X + Y$
3. Calculer  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $E(Z)$ ,  $V(X)$ ,  $V(Y)$  et  $V(Z)$
4. Calculer  $E(3X - 2Y)$  ;  $V(3X - 2Y)$  ;  $\sigma(3X - 2Y)$

## Exercice 3 corrigé disponible

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires et indépendantes dont les lois de probabilités sont données dans les tableaux ci-dessous :

$x_i$	-2	0	3	4
$p(X = x_i)$	0,4	0,2	0,3	0,1

$y_i$	-5	10	20
$p(Y = y_i)$	0,35	0,45	0,1

- 1) Calculer  $E(X + Y)$ .
- 2)  $V(X + Y)$ .
- 3) Déterminer une valeur approchée de  $\sigma(X + Y)$  à  $10^{-2}$  près.

## Exercice 4 corrigé disponible

Une urne contient une boule rouge et  $n$  boules blanches.

On tire **successivement et avec remise** deux boules de l'urne.

1. Exprimer en fonction de  $n$  la probabilité des événements suivants :  
 M : « Les deux boules sont de la même couleur »  
 N : « Les deux boules sont de couleur différente »
2. On considère le jeu suivant : le joueur perd  $(n + 1)^2$  euros si M est réalisé et gagne  $2(n + 1)^2$  euros sinon. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.
  - (a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - (b) Démontrer que  $E(X) = -n^2 + 4n - 1$ .

Pour les questions suivantes toute trace de recherche et de raisonnement seront pris en compte.

  - (c) Pour quelles valeurs de  $n$  le jeu est favorable au joueur ?
  - (d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches, que doit-il répondre ?

On suppose que  $n = 2$  boules blanches

3. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$

4. On considère les événements suivants :

M : tirer simultanément 2 boules de la même couleur

N : tirer simultanément 2 boules de couleur différentes

Déterminer  $P(M)$  et  $P(N)$

Soit  $Y$  la variable aléatoire qui est égale au gain algébrique (positif ou négatif du joueur) . Si M est réalisé le joueur perd 5 euros, si N est réalisé le joueur gagne 10 euros

5. Calculer  $E(Y)$  et  $V(Y)$

6. Calculer  $E(X + Y)$ ,  $V(X + Y)$ ,  $E(5X + 2Y)$  et  $V(5X + 2Y)$

## Exercice 5 corrigé disponible

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de  $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est  $\frac{2}{3}$ . Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie. On appelle  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et  $T$  la variable aléatoire égale au temps en minute mis par l'élève pour aller au lycée.

- 1) Déterminer la loi de probabilités de  $X$ .
- 2) Exprimer  $T$  en fonction de  $X$ .
- 3) Déterminer  $E(T)$  et interpréter ce résultat.
- 4) L'élève part 17 minutes avant le début des cours.
  - a. Peut-il espérer être à l'heure ?
  - b. Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

## Exercice 6 corrigé disponible

Une agence de location de voiture dispose de trois voitures qu'elle loue à la journée.



On admet que la demande journalière de véhicules est une variable aléatoire  $X$  dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

$x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,22	0,37	0,24	0,10	0,05	0,02

On suppose que tous les véhicules sont en état de marche. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Calculer l'espérance et la variance de  $Y$ .
3. Le prix de location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.
  - a. Exprimer la variable aléatoire  $B$  égale au bénéfice journalier en fonction de  $Y$ .
  - b. Calculer l'espérance et la variance de  $B$ .

## Exercice 7 corrigé disponible

Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré trois fois successivement, puis une pièce de monnaie non truquée cinq fois successivement.

On gagne autant d'euros que le numéro inscrit sur le dé, et un euro quand on obtient pile.

Pour tout entier  $k$  compris entre 1 et 3, on note  $X_k$  la variable aléatoire qui, au  $k$ -ième lancer du dé, associe le gain obtenu et, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et 5,  $Y_i$  la variable aléatoire qui, au  $i$ -ième lancer de la pièce, associe le gain obtenu.

1. Calculer  $E(X_k)$  et  $V(X_k)$ .
2. Calculer  $E(Y_i)$  et  $V(Y_i)$ .
3. Soit  $Z$  la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur.
  - a. Exprimer  $Z$  en fonction des variables  $X_k$  et  $Y_i$ .
  - b. En déduire l'espérance et la variance de  $Z$ .

### Exercice 8 corrigé disponible

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance 5 et d'écart-type 2. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $S_n$  (respectivement  $M_n$ ) la variable aléatoire somme (resp. moyenne) d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$ .

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- a. L'espérance de  $S_{10}$  est 50.
- b. La variance de  $M_{100}$  est 0,2.
- c. L'écart-type de  $S_{400}$  est 40.
- d. L'espérance de  $M_{50} - 50$  est 0.

### Exercice 9 corrigé disponible

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers  $\Omega$ .

À partir des informations données à chaque ligne, recopier et compléter le tableau ci-dessous.

$V(X)$	$V(Y)$	$V(X+Y)$	$V(3X-Y)$
1,4		3	
2,8			39,4
		11,4	53,8

### Exercice 10 corrigé disponible

On dispose d'un jeu de 52 cartes comme ci-dessus et on prélève une carte au hasard dans le paquet.

On s'intéresse à deux aspects de la carte.

› Sa couleur :

- si la carte est un cœur, on gagne 10 points ;
- si la carte est un trèfle, on gagne 2 points ;
- dans les autres cas, on perd 15 points ;

› Sa valeur :

- si la carte est une figure (valet, dame ou roi), on gagne 5 points ;
- si la carte est un as, on gagne 2 points ;
- si la carte est un 2 ou un 10, on gagne 1 point ;
- si la carte est un 5, on ne gagne pas de point ;
- dans les autres cas, on perd 1 point.

Soit  $Z$  la variable aléatoire correspondant au nombre de points remportés au total.

1. On note  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires correspondant au nombre de points obtenus en regardant respectivement la couleur et la valeur de la carte.

a. Exprimer  $Z$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

b. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

c. En déduire  $E(Z)$  puis  $\sigma(Z)$ . On arrondira à  $10^{-4}$  près.

2. On joue cinq fois de suite à ce jeu, en remettant systématiquement la carte obtenue dans le paquet et en mélangeant de nouveau les cartes.

Pour tout entier  $k \in \{1; \dots; 5\}$ , on note  $Z_k$  la variable aléatoire correspondant au nombre de points obtenus au  $k^e$  tirage.

Soit  $S$  la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus à l'issue de la partie.

a. Exprimer  $S$  en fonction des variables  $Z_k$ .

b. Calculer  $E(S)$  puis interpréter le résultat obtenu.

Calculer  $\sigma(S)$ . On arrondira à  $10^{-4}$  près.

c. On pose enfin la variable aléatoire  $M = \frac{Z_1 + \dots + Z_5}{5}$ .

À quoi la variable aléatoire  $M$  correspond-elle ?

Calculer  $\sigma(M)$ . On arrondira à  $10^{-4}$  près.

## Exercice 11

Afin de réguler le trafic automobile, le maire d'une commune a décidé de régler les trois feux de la voie principale de manière à obtenir les résultats suivants :

- 80 % des automobilistes doivent s'arrêter au premier feu ;
- 30 % des automobilistes doivent s'arrêter au second feu ;
- 65 % des automobilistes doivent s'arrêter au troisième feu.

On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de feux auxquels s'arrête un automobiliste pris au hasard.

1. Justifier qu'on peut écrire  $X = X_1 + X_2 + X_3$  où, pour tout  $k \in \{1; 2; 3\}$ ,  $X_k$  est la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'automobiliste s'est arrêté au feu  $k$  et 0 sinon.

2. Déterminer les lois de probabilité des trois variables aléatoires  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$ .

3. En déduire  $E(X)$ . Interpréter le résultat obtenu.

## Exercice 12

Dans un jeu de Scrabble®, on compte 102 jetons parmi lesquels figurent deux jokers (valant 0 point) et les différentes lettres de l'alphabet dont les valeurs et les occurrences sont répertoriées dans le tableau suivant :

A <sub>1</sub>	B <sub>3</sub>	C <sub>3</sub>	D <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>	F <sub>4</sub>	G <sub>2</sub>	H <sub>4</sub>	I <sub>1</sub>	J <sub>8</sub>	K <sub>10</sub>	L <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>
9	2	2	3	15	2	2	2	8	1	1	5	3

N <sub>1</sub>	O <sub>1</sub>	P <sub>3</sub>	Q <sub>8</sub>	R <sub>1</sub>	S <sub>1</sub>	T <sub>1</sub>	U <sub>1</sub>	V <sub>4</sub>	W <sub>10</sub>	X <sub>10</sub>	Y <sub>10</sub>	Z <sub>10</sub>
6	6	2	1	6	6	6	6	2	1	1	1	1

Lors du premier tour, on tire au hasard sept jetons du sac. On suppose qu'on peut assimiler cette expérience à un tirage avec remise.

Pour tout entier  $k \in \{1; \dots; 7\}$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire correspondant au nombre de points attribués par le jeton tiré au  $k^e$  tirage, et on note  $S_7$  la variable aléatoire définie par  $S_7 = X_1 + X_2 + \dots + X_7$ .

1. Interpréter la variable aléatoire  $S_7$  dans le cadre de l'exercice.

2. Déterminer  $E(S_7)$  et interpréter le résultat obtenu.

3. On pose la variable aléatoire  $M_7$  définie par

$$M_7 = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_7}{7}.$$

Calculer  $E(M_7)$  et interpréter le résultat obtenu.

# ∞ BACCALAURÉAT GÉNÉRAL ∞

## EXERCICES D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

### Session 2024 Exercices 0

*Le positionnement des épreuves d'enseignement de spécialité au mois de juin modifie la liste des contenus sur lesquels les élèves sont susceptibles d'être interrogés.*

*À compter de la session 2024, les sujets s'appuieront sur l'ensemble du programme de spécialité du cycle terminal.*

*Ce document a pour objectif de guider les enseignants dans la formation de leurs élèves de première et terminale de voie générale en spécialité Mathématiques. Il présente huit exemples d'exercices dans lesquels figurent des contenus et des capacités susceptibles d'être évalués lors de l'épreuve du baccalauréat. Cette liste vient compléter l'ensemble des exercices proposés lors des sessions précédentes du baccalauréat.*

## Exercice 1

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

### Partie I

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

1. Soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = xe^{-x}$ .  
Vérifier que la fonction  $u$  est une solution de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. On considère l'équation différentielle  $(E') : y' + y = 0$ .  
Résoudre l'équation différentielle  $(E')$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Déterminer l'unique solution  $g$  de l'équation différentielle  $(E)$  telle que  $g(0) = 2$ .

### Partie II

Dans cette partie,  $k$  est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.

On considère la fonction  $f_k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}.$$

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

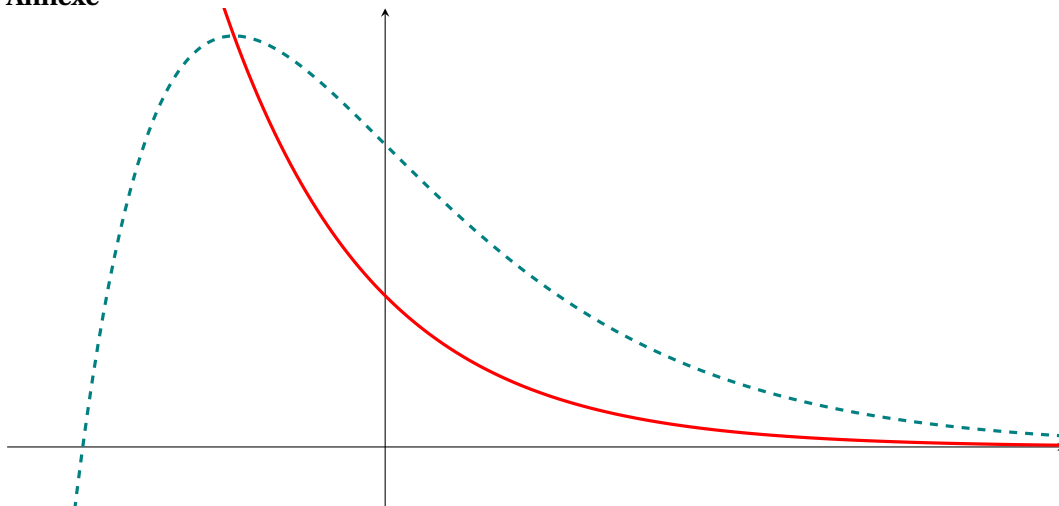
$$h(x) = e^{-x}.$$

On note  $C_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthogonal et  $C$  la courbe représentative de la fonction  $h$ .

On a représenté sur le graphique en annexe les courbes  $C_k$  et  $C$  sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe  $C$  ?
2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel  $k$  et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.

## Annexe



## Exercice 2

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

## Partie I

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :

$$f_n(x) = x^n e^x$$

On note  $C_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. On désigne par  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx.$$

1. a. On désigne par  $F_1$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par :

$$F_1(x) = (x-1)e^x.$$

Vérifier que  $F_1$  est une primitive de la fonction  $f_1$ .

- b. Calculer  $I_1$ .

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

3. Calculer  $I_2$ .

4. On considère la fonction mystere écrite dans le langage Python :

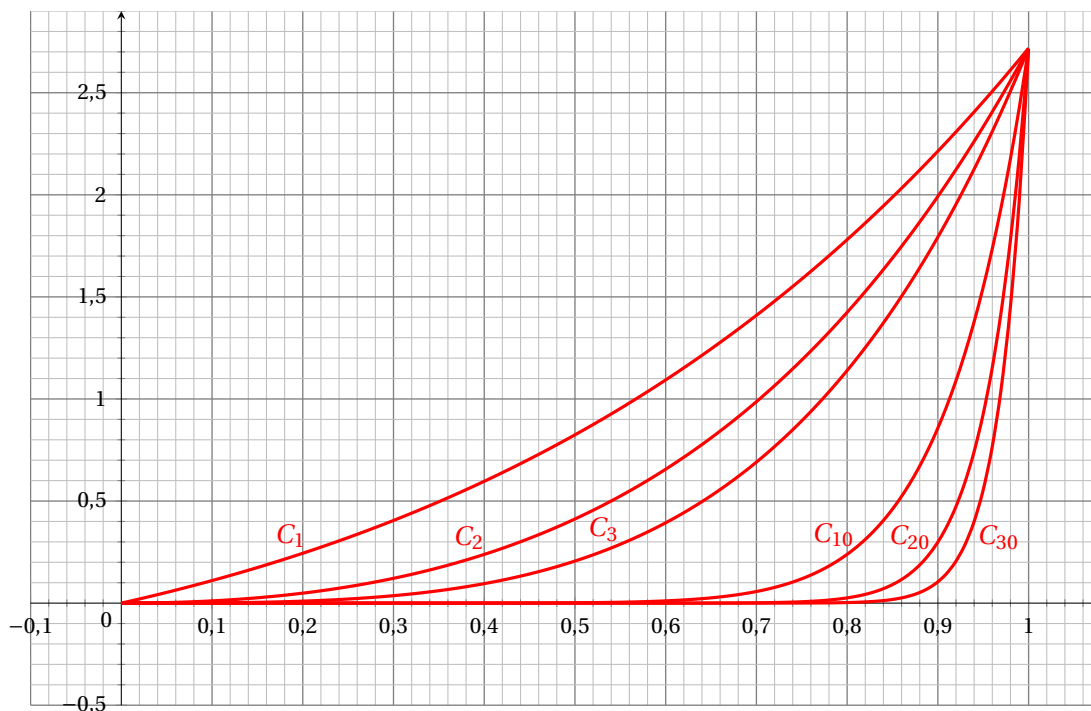
```
from math import e # la constante d'Euler e

def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i + 1)*a
        L.append(a)
    return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

**Partie II**

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes  $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$  et  $C_{30}$ .



- Donner une interprétation graphique de  $I_n$ .
- Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite  $(I_n)$ ?

2. Montrer que pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx.$$

3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

**Exercice 3**

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

**Partie I**

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

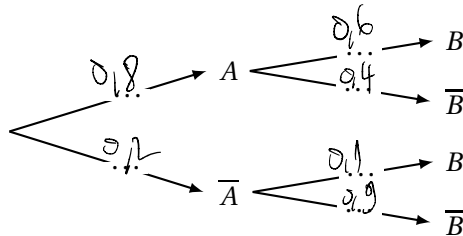
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 »;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  les évènements contraires de A et de B.

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.  $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$ .

3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.  
*D'après la formule des probabilités totales, on a :*  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$   
 On note :  $X_1 = 0$  ou  $X_1 = 1$   $= 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,1$   
 $= 0,50$

- $X_1$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1;
  - $X_2$  la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2;  
 $X_2 = 0$  ou  $X_2 = 1$ .
  - X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire  $X = X_1 + X_2$ .
4. Déterminer l'espérance de  $X_1$  et de  $X_2$ . En déduire l'espérance de X. Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
  5. On souhaite déterminer la variance de X.
    - a. Déterminer  $P(X = 0)$  et  $P(X = 2)$ . En déduire  $P(X = 1)$ .
    - b. Montrer que la variance de X vaut 0,57.
    - c. A-t-on  $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$ ? Est-ce surprenant?

## Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité  $\frac{3}{4}$  de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de  $P(Y = 8)$ .
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

**Partie III**

On suppose que les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen :  $Z = X + Y$ .

1. Calculer l'espérance et la variance de  $Z$ .

2. Soit  $n$  un nombre entier strictement positif.

Pour  $i$  entier variant de 1 à  $n$ , on note  $Z_i$  la variable aléatoire qui, à un échantillon de  $n$  élèves, associe la note de l'élève numéro  $i$  à l'examen.

On admet que les variables aléatoires  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  sont identiques à  $Z$  et indépendantes.

On note  $M_n$  la variable aléatoire qui, à un échantillon de  $n$  élèves, associe la moyenne de leurs  $n$  notes, c'est-à-dire :

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$$

a. Quelle est l'espérance de  $M_n$  ?

b. Quelles sont les valeurs de  $n$  telles que l'écart type de  $M_n$  soit inférieur ou égal à 0,5 ?

c. Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que  $6,3 \leq M_n \leq 8,3$  est supérieure ou égale à 0,75.

**Exercice 4**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.*

*Aucune justification n'est demandée.*

*Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

*Les questions sont indépendantes.*

On considère le prisme droit ABFEDCGH tel que  $AB = AD$ .

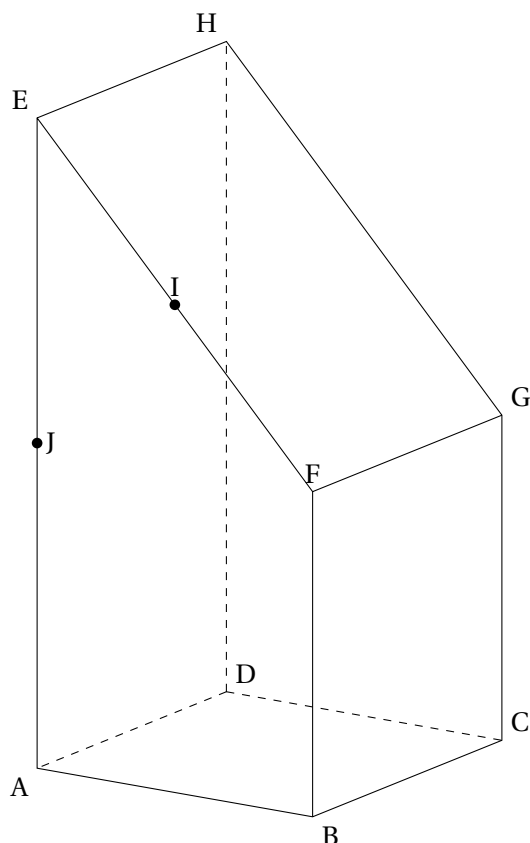
Sa base ABFE est un trapèze rectangle en A, vérifiant  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ .

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].

On associe à ce prisme le repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que :

$$\vec{i} = \overrightarrow{AB}; \quad \vec{j} = \overrightarrow{AD}; \quad \vec{k} = \overrightarrow{AJ}$$



- On donne les coordonnées de quatre vecteurs dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Lequel est un vecteur normal au plan (ABG)?
  - $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Parmi les droites suivantes, laquelle est parallèle à la droite (IJ)?
  - (DG)
  - (BD)
  - (AG)
  - (FG)
- Quels vecteurs forment une base de l'espace?
  - $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CG})$
  - $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$
  - $(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DG})$
  - $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CG}; \overrightarrow{CE})$
- Une décomposition du vecteur  $\overrightarrow{AG}$  comme somme de plusieurs vecteurs **deux à deux orthogonaux** est :
  - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$
  - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$
  - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}$
  - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$
- Le volume du prisme droit ABFEDCGH, est égal à :
  - $\frac{5}{8}$
  - $\frac{8}{5}$
  - $\frac{3}{2}$
  - 2



## Exercice 6

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+2u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

- **Affirmation 1** : «  $u_4 = \frac{1}{9}$ . »
- **Affirmation 2** : « Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ . »
- **Affirmation 3** : « La suite numérique  $(u_n)$  est minorée par  $10^{-10}$ . »

## Exercice 7

On considère les fonctions  $f_k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_k(x) = x + ke^{-x},$$

où  $k$  est un réel strictement positif.

1. On s'intéresse dans cette question au cas  $k = 0,5$ , donc à la fonction  $f_{0,5}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_{0,5}(x) = x + 0,5e^{-x}.$$

- a. Montrer que la dérivée de  $f_{0,5}$ , notée  $f'_{0,5}$  vérifie  $f'_{0,5}(x) = 1 - 0,5e^{-x}$ .
- b. Montrer que la fonction  $f_{0,5}$  admet un minimum en  $\ln(0,5)$ .

Soit  $k$  un réel strictement positif. On donne le tableau de variations de la fonction  $f_k$ .

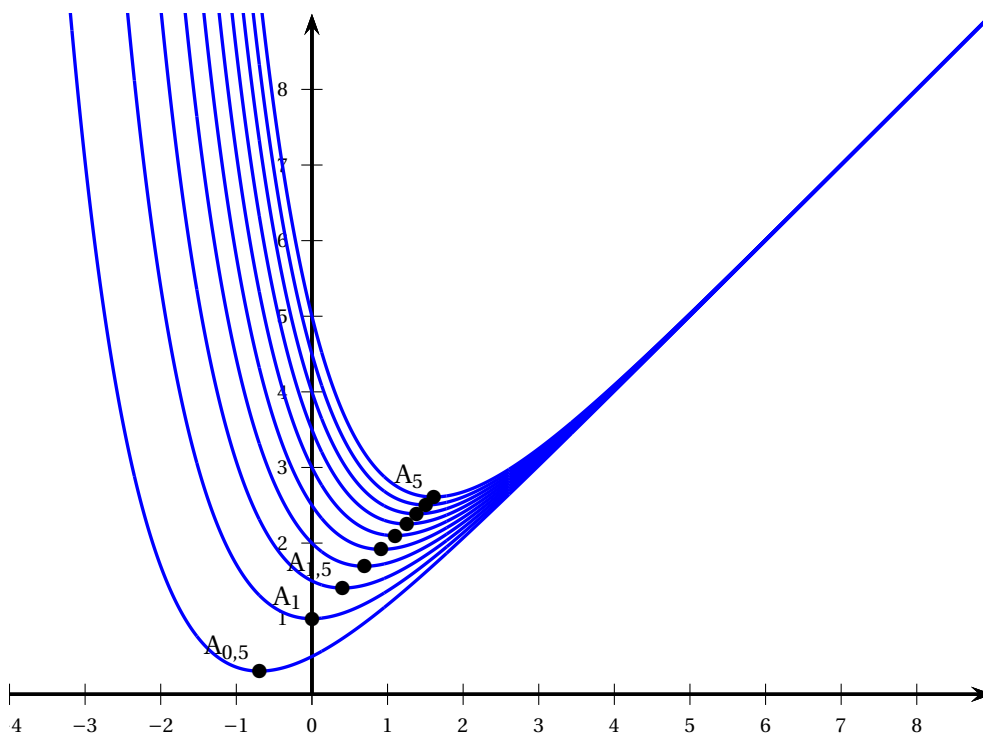
Valeurs de $x$	$-\infty$	$\ln(k)$	$+\infty$
Variations de $f_k$	$+\infty$	$f_k(\ln k)$	$+\infty$

2. Montrer que pour tout réel positif  $k$ ,  $f_k(\ln k) = \ln k + 1$ .

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On note  $A_k$  le point de la courbe  $\mathcal{C}_k$  d'abscisse  $\ln k$ .

On a représenté ci-dessous quelques courbes  $\mathcal{C}_k$  pour différentes valeurs de  $k$ .



3. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- **Affirmation :** « Pour tout réel  $k$  strictement positif, les points  $A_{0,5}$ ,  $A_1$  et  $A_k$  sont alignés. »

## Exercice 8

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \text{ et} \\ u_{n+1} &= 3u_n + 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. On considère la fonction calcul écrite dans le langage Python qui renvoie la valeur de  $u_n$ .

```
def calcul(n):
    u = 0
    for i in range(n):
        u = 3 * u + 1
    return u
```

On considère par ailleurs la fonction liste écrite dans le langage Python :

```
def liste(n):
    l = [ ]
    for i in range(n):
        l.append( calcul(i) )
    return l
```

**Affirmation 1 :** « l'appel `liste(6)` renvoie la liste  $[0, 1, 4, 13, 42, 121]$ . »

**2. Affirmation 2 :** « pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$ . »

**3. Affirmation 3 :** « pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n$  est une puissance de 3. »