Variable aléatoire :

$\Omega \leftarrow$ issue $\xrightarrow{X}$ $\mathbb{R}$ x.

Loi de probabilité :

$X=k$	$X=0$	$X=1$	...	$X=n$
$p(X=k)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$	...	$P(X=n)$

$E(X)=\sum p_i x_i$. $\quad E(aX+b)= aE(X)+b$.

$V(X)=\sum p_i(x_i-E(X))^2$. $\quad V(aX+b)=a^2 . V(X)$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ $\quad \sigma(aX+b)=|a|\sqrt{V(X)}$.

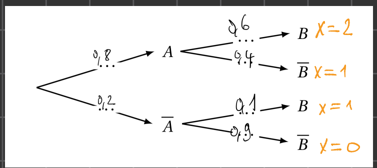
X et Y $\boxed{\text{indépendantes}}$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

Sujet 0 : Pasta - Variables aléatoires :

1)



2) $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=0,8\times 0,6$

$\boxed{P(A\cap B)=0,48}$.

3) D'après la formule des probabilités totales :

$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)$

$P(B)=0,48+0,2\times 0,1=\frac{1}{2}$.

4) Loi de probabilité de X_1.

$X_1=k$	$X_1=0$	$X_1=1$.
$P(X_1=k)$	0,2	0,8

$E(X_1)=0,2\times 0+0,8\times 1=0,8$.

$X_2=k$	$X_2=0$	$X_2=1$.
$P(X_2=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X_2)=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1$.

$E(X_2)=\frac{1}{2}$.

$E(X)=E(X_1)+E(X_2)=0,8+\frac{1}{2}=1,3$.

$E(X)$ est la note moyenne obtenue par un élève à l'exercice 1.

5) a) $P(X=0)=P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

$=0,2\times 0,9$.

$=\boxed{0,18}$.

$P(X=2)=P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$

$=\boxed{0,48}$.

$P(X=1)=1-P(X=2)-P(X=0)$.

$=1-0,48-0,18$

$\boxed{P(X=1)=0,34}$.

b) $V(X)=\sum p_i(x_i-E(X))^2$.

$V(X)=0,18(0-1,3)^2+0,34\times(1-1,3)^2+0,48\times(2-1,3)^2$

$V(X)=0,57$.

c) $V(X)=V(X_1)+V(X_2)$?

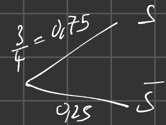
D'une part $V(X)=0,57$.

D'autre part $V(X_1)+V(X_2)=0,2(0-0,8)^2+0,8\times(1-0,8)^2+0,5(0-0,5)^2+0,5\times(1-0,5)^2$

$=0,41$.

$V(X)\neq V(X_1)+V(X_2)$, cela est normal car les événements ne sont pas indépendants.

1) L'expérience aléatoire est bien une épreuve de Bernoulli :



On répète cette épreuve 8 fois de manière identique et indépendante. Alors la variable aléatoire Y associée au nombre de points suit la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(8;\frac{3}{4})$. $P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

2. $P(Y=8)=\binom{8}{8}\times\left(\frac{3}{4}\right)^8\times\left(\frac{1}{4}\right)^{8-8}$

$P(Y=8)=\left(\frac{3}{4}\right)^8$.

3) $E(Y)=np=8\times\frac{3}{4}=6$ pt.

$V(Y)=np(1-p)=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$.

Partie 3

1. $E(Z)=E(X)+E(Y)=1,3+6=7,3$.

$V(Z)=V(X)+V(Y)$ car X et Y sont indépendantes.

$V(Z)=0,57+1,5=\boxed{2,07}$

2. a) Ici, on a $E(M_n)=E(Z)=7,3$.

b) $V(M_n)=\frac{V(Z)}{n}=\frac{2,07}{n}$.

$\sigma(M_n)=\frac{\sqrt{2,07}}{\sqrt{n}}\leq 0,5$.

$\frac{2,07}{n}\leq 0,25$.

$\frac{n}{2,07}\geq 4$

$n\geq 4\times 2,07$.

$n\geq 8,28$

Donc $n\geq 9$.

Loi des grands nombres – Fiche de cours

1. L'inégalité de Bienaymé-Tchébytchev

a. Variable alétoire positive

Une variable aléatoire est dite positive ou nulle dans un univers Ω lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des nombres réels positifs ou nuls.

b. L'inégalité de Markov

X est une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérence $E(X)$; $\forall a>0 \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

c. L'inégalité de Bienaymé-Tchébytchev

Soit X une variable aléatoire d'espérence $E(X)$ et de variance $V(X)$

$$P(|X-E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

2. Loi des grands nombres

a. L'inégalité de concentration

Soit X une variable aléatoire d'espérence $E(X)$ et de variance $V(X)$

On appelle M_n la variable moyenne avec $M_n = \frac{1}{n} \sum X_i$

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{na^2}$$

b. Loi faible des grands nombres

$$\lim_{n \to \infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$

X_1	0	1	2
$P(X_1 = x)$	0,5	0,4	0,1

$P(X \geq 1)$: