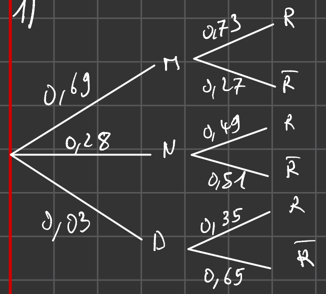
plus de bonnes notes

Dimanche 12 mai 2024 - Tale G spé maths.

Amérique du Nord 27/03/2023.

1)



2) $P(D\cap R) = P(D)\times P_D(R) = 0{,}03\times 0{,}35$
$= \boxed{0{,}0105}$

3) $P(M\cap\overline{R}) = P(M)\times P_M(\overline{R}) = 0{,}69\times 0{,}27$
$= \boxed{0{,}1863}$.

Lorsqu'on prélève un déchet au hasard, la probabilité qu'il soit minéral et non dangereux ET non recyclable est de 0,1863.

4) D'après la loi des probabilité totales :
$P(R) = P(M\cap R) + P(N\cap R) + P(D\cap R)$.
$P(R) = P(M)\times P_M(R) + P(N)\times P_N(R) + P(D)\times P_D(R)$
$P(R) = 0{,}69\times 0{,}73 + 0{,}28\times 0{,}49 + 0{,}03\times 0{,}35$.
$\boxed{P(R) = 0{,}6514}$.

5) D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :
$P_R(N) = \dfrac{P(N\cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}28\times 0{,}49}{0{,}6514}$
$P_R(N) \simeq 0{,}2106$ (arrondi à 10^{-4} près)

Partie B.

1) a) X suit la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(20\,;\,0{,}6514)$.

b) $P(X=14) = \binom{20}{14}\times 0{,}6514^{14}\times(1-0{,}6514)^{20-14}$.

$P(X=14) \simeq 0{,}1723$ (à 10^{-4} près).

2) a) X suit désormais $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}6514)$.

$P(X=0) = \binom{n}{0}\times 0{,}6514^{0}\times(1-0{,}6514)^{n}$.

$P(X=0) = 0{,}3486^{n}$.

b) $P(X\geq 1) \geq 0{,}9999$.

$1 - P(X=0) \geq 0{,}9999$.
$1 - 0{,}3486^{n} \geq 0{,}9999$.
$-0{,}3486^{n} \geq -0{,}0001$.
$0{,}3486^{n} \leq 0{,}0001$.

On applique la fonction $x\mapsto \ln(x)$ strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$\ln(0{,}3486^{n}) \leq \ln(0{,}0001)$.
$n\ln(0{,}3486) \leq \ln(0{,}0001)$
$n \geq \dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}3486)}$
$n \geq 8{,}74$.
$\boxed{n\geq 9}$

0 1 2 ... λ ... n.

x^{2x}

$\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$

Exercice n°2.

1) a) Soit $x\in\mathbb{R}$, $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$.
Étude de la limite en $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.
$\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$
Par composition de limites, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{2x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x-3 = +\infty$.

Par somme, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

b) Soit $x\in\mathbb{R}$ $g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$
$g(x) = e^{2x}\left(3 - \dfrac{2x}{e^{2x}} - \dfrac{3}{e^{2x}}\right)$

$g(x) = e^{2x}\left(3 - \dfrac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}} - \dfrac{3}{e^{2x}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{2x} = +\infty$ par croissance comparée.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^{2x}} = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \dfrac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}} - \dfrac{3}{e^{2x}} = 3$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.

Par produit de limites, on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'où :
$g'(x) = 3\times 2\times e^{2x} - 2$.
$\boxed{g'(x) = 6e^{2x} - 2}$

c) On résout l'inéquation suivante :
$g'(x) \geq 0$.

$6e^{2x} - 2 \geq 0$.
$e^{2x} \geq \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

$e^{2x} \geq \dfrac{1}{3}$.

On applique $x\mapsto \ln(x)$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$\ln e^{2x} \geq \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
$2x \geq -\ln(3)$.
$x \geq -\dfrac{\ln(3)}{2}$.

$g'(x)\geq 0 \iff x \geq -\dfrac{\ln(3)}{2}$.

Par contraposée, on a.
$x \leq -\dfrac{\ln(3)}{2} \iff g'(x)\leq 0$.

c) D'après les questions précédentes, on a :

x	$-\infty$	$-\frac{\ln(3)}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	$\frac{\ln(3)}{2}-2$	$+\infty$

$g\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) = 3\times e^{2\times\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right)} - 2\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) - 3$.

$g\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) = 3\times\frac{1}{3} + \ln(3) - 3$
$= \ln(3) - 2$.

3) a) $g(0) = 3e^{2\times 0} - 2\times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$.
0 est une solution de l'équation $g(x) = 0$.

3) b) Sur $]-\infty; -\frac{\ln(3)}{2}[$, g est est continue et strictement décroissante.
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $g\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right) < 0$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'éq° $g(x) = 0$

admet une solution unique sur $]-\infty ; -\frac{\ln(3)}{2}]$.

$-1,5 \le \alpha \le -1,4$.

4) On a, d'après les questions précédentes :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B :

1) $f(x) = e^{3x} - (2x+1)e^{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3e^{3x} - \left(2\times e^{x} + e^{x}(2x+1)\right)$$

$$f'(x) = 3\times e^{2x}\times e^{x} - 2e^{x} - e^{x}(2x+1)$$

$$f'(x) = e^{x}\left(3e^{2x} - 2 - 2x - 1\right).$$

$$f'(x) = e^{x}\left(3e^{2x} - 2x - 3\right).$$

$$\boxed{f'(x) = e^{x} g(x).}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$.

Ainsi le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3) $f'(x) = e^{x}\times g(x)$

Donc, f' a les mêmes variations que g. Or sur $]-\infty ; -\frac{\ln(3)}{2}]$, g est décroissante. Donc f' est décroissante

$\iff f''(x) \le 0$.

$\exists\, x_0 \in]-\infty ; -\frac{\ln(3)}{2}]$, t.q $f''(x_0) \le 0$.

La fonction g n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

$AB^2 = (x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2$

$AB^2 = 4^2+4^2+(-2)^2$

$AB^2 = 36$.

$AC^2 = (x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2$.

$AC^2 = 4^2+(-2)^2+4^2 = 36$.

$BC^2 = (x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2$.

$BC^2 = 0^2+(-6)^2+6^2 = 72$.

Réponse a.

2) $B\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}8\\-3\\-8\end{pmatrix}$

c) $4x+y+z-21=0$.

$\vec{BD}$ $\vec{BC}$

$\vec{BD}\wedge\vec{BC} = \vec{n}$?

∽ Baccalauréat Amérique du Nord 27 mars 2023 ∾

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

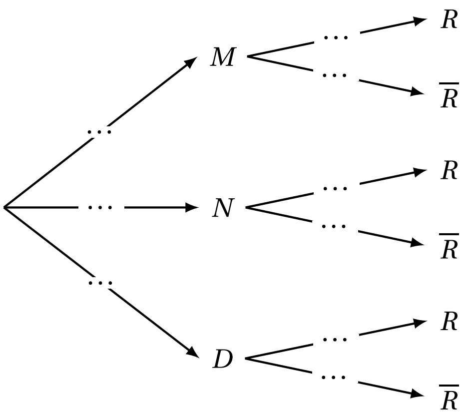
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

3. Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0{,}651\,4$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.

EXERCICE 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - (2x+1)\mathrm{e}^{x}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 2x - 3$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. **a.** On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.

b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.

3. a. Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

   Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

EXERCICE 3 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points $\mathrm{A}(-1\,;\,2\,;\,5)$, $\mathrm{B}(3\,;\,6\,;\,3)$, $\mathrm{C}(3\,;\,0\,;\,9)$ et $\mathrm{D}(8\,;\,-3\,;\,-8)$.
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. ABC est un triangle :

   a. isocèle rectangle en A **b.** isocèle rectangle en B
   c. isocèle rectangle en C **d.** équilatéral

2. Une équation cartésienne du plan (BCD) est :

   a. $2x + y + z - 15 = 0$ **b.** $9x - 5y + 3 = 0$
   c. $4x + y + z - 21 = 0$ **d.** $11x + 5z - 73 = 0$

3. On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$.

   On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

   On peut affirmer que :

   a. $\mathrm{H}(-2\,;\,17\,;\,12)$ **b.** $\mathrm{H}(3\,;\,7\,;\,2)$
   c. $\mathrm{H}(3\,;\,2\,;\,7)$ **d.** $\mathrm{H}(-15\,;\,1\,;\,-1)$

4. Soit la droite Δ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 3t \end{array}\right.$, avec t réel.

   Les droites (BC) et Δ sont :

   a. confondues **b.** strictement parallèles
   c. sécantes **d.** non coplanaires

5. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 2z - 6 = 0$.

   On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$.

   On peut affirmer que :

   a. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont strictement parallèles
   b. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AB)
   c. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AC)
   d. les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (BC)

EXERCICE 4 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

   Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. **a.** Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.

   b. Établir que pour tout entier naturel n,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?

b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.