plus de bonnes notes

Aire2 2023.

1. $V(FIGB) = \frac{1}{3} \times \frac{1\times 1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ u.v

2. Voici les coordonnées de I :
$I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$.

3. Calculons les coordonnées de $\vec{DJ}$:
$D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$

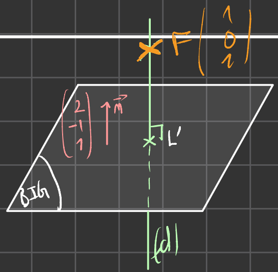
D'une part $\vec{DJ}\cdot\vec{BG} = 2\times 0 + (-1)\times 1 + 1\times 1 = 0$
D'autre part $\vec{DJ}\cdot\vec{BI} = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)\times 0 + 1\times 1 = 0$

$\vec{DJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs $\vec{BG}$ et $\vec{BI}$ non colinéaires du plan (BGI) donc $\vec{DJ}$ est normal au plan (BGI).

4. Éq° cartésienne de (BGI) de vecteur normal $\vec{DJ}$: $(BGI) : 2x - y + z + d = 0$
Or $B \in (BGI)$ d'où : $2x_B - y_B + z_B + d = 0$
$2\times 1 - 0 + 0 + d = 0$
$\boxed{d = -2}$

$(BGI) : \boxed{2x - y + z - 2 = 0}$

5.



La droite (d) est orthogonale à (BIG) donc $\vec{n}$ dirige (d)

$(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

6.a $L' = (BIG) \cap (d)$

$(d) \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$ $\quad (BIG) : 2x - y + z - 2 = 0$

$2(1+2t) - (-t) + (1+t) - 2 = 0$
$2 + 4t + t + 1 + t - 2 = 0$
$6t + 1 = 0$
$t = -\frac{1}{6}$

D'où $L' \begin{cases} x_{L'} = 1 + 2\times\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} \\ y_{L'} = -\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \\ z_{L'} = 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \end{cases}$

6.b $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $L'\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\\\frac{5}{6}\end{pmatrix}$

$FL' = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{6}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{6}-1\right)^2}$

$FL' = \sqrt{\frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{36}}$

$FL' = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

6c On a : $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(BIG) \times FL'$.

$\text{Aire}(BIG) = \frac{V \times 3}{FL'}$

$\text{Aire}(BIG) = \frac{3\times\frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4}$

Exercice n°2 :

1) $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Par somme $\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1}$

$x^2 + 2x + 1 = x^2\left(1 + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$

2) $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$
$= e^{2x}\left(1 - \frac{e^x}{e^x \times e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)$
$= e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}} = 1$
$\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$
Par produit de limites $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

3) $x \in \mathbb{R}$ $\quad g(x) = e^{2x} - e^x + 1$

$g'(x) = 2e^{2x} - e^x$

$\boxed{g'(x) = e^x(2e^x - 1)}$

où $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = e^x(2e^x - 1)$

$e^x > 0$ où $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $g'(x) > 0$ lorsque $(2e^x - 1) > 0$

Donc :

$2e^x - 1 > 0$
$\Leftrightarrow 2e^x > 1$
$\Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2}$
on applique la fonction $\ln \in]0 ; +\infty[$:
$\Leftrightarrow \ln(e^x) > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
$\Leftrightarrow x > -\ln(2)$

Donc $g'(x) > 0$ lorsque $(2e^x - 1) > -\ln(2)$:

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = e^{2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1$
$= e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + 1$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1$
$= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4}$
$= \frac{3}{4}$

plus de bonnes notes

5) D'après le tableau de variations, $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

6) $g(x) = e^{2x} - e^{x} + 1$

$X = e^{x}$

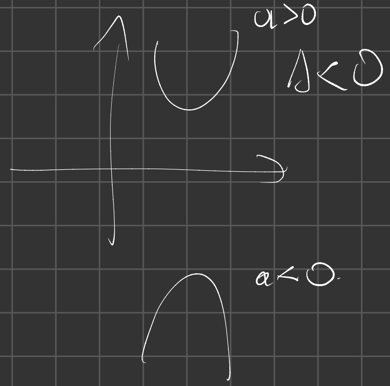
$g(x) = X^2 - X + 1$

$a = 1 \quad b = -1 \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= -3 < 0$

$\forall X \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$



Partie B.

1) $f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}\ e^{2x} - e^{x} + 1 > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) $\left.\begin{array}{l} f(x) = \ln(g(x)) \\ f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} \end{array}\right\}$ D'après la formule du cours.

3) $T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = \dfrac{g'(0)}{g(0)} \times x + \ln(e^{2\times 0} - e^{0} + 1)$

$y = \dfrac{e^{0}(2e^{0} - 1)}{e^{2\times 0} - e^{0} + 1} \times x + 0$

$y = \dfrac{1}{1} x = x$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{e^{x}(2e^{x} - 1)}{e^{2x} - e^{x} + 1}$ $\oplus$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{sgn}(f'(x)) = \mathrm{sgn}(g'(x))$

$f'(x) > 0 \iff x > -\ln(2)$

f est $\nearrow$ sur $]-\ln(2); +\infty[$