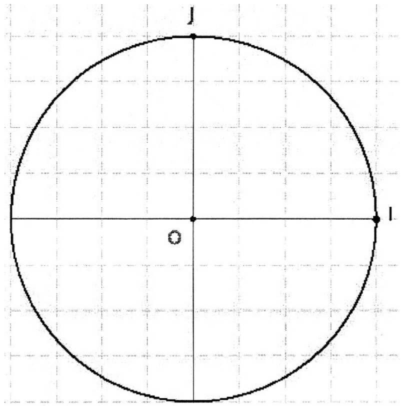
Fonctions trigonométriques – Exercices - Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

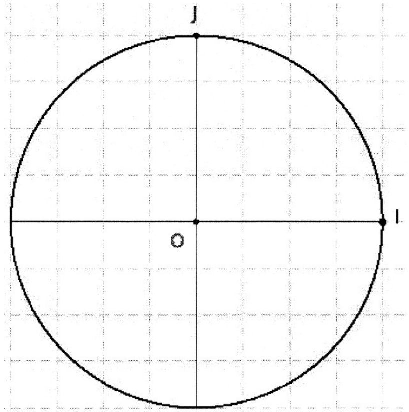
1. Placer sur le cercle trigonométrique les points représentatifs des réels suivants :

$$\frac{2\pi}{3} \ ; \ -\frac{3\pi}{4} \ ; \ \frac{17\pi}{6} \ ; \ \frac{5\pi}{2}$$



2. Déterminer la mesure principale des angles puis les placer sur le cercle trigonométrique

$$\frac{23\pi}{4} \ ; \ \frac{-20\pi}{3} \ ; \ \frac{37\pi}{8} \ ; \ \frac{-41\pi}{6}$$



Exercice 2 **corrigé disponible**

1. Sur le cercle trigonométrique, placer le point M associé à la valeur $\frac{\pi}{6}$
2. Placer les points M_1, M_2, M_3, M_4 associés aux réels $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{9\pi}{6}$, $\frac{-\pi}{6}$
3. Rappeler les valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$
4. En déduire les valeurs des cosinus et sinus des angles suivants :

$$\frac{5\pi}{6} \ ; \ \frac{9\pi}{6} \ ; \ \frac{-\pi}{6}$$

Exercice 3 **corrigé disponible**

1. En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

a) $A = \sin(x+\pi) + \cos(x+\frac{\pi}{2}) + \sin x - \sin(-x)$

b) $B = \cos x - \cos(x-\frac{\pi}{2}) - \sin(x-\pi) + \cos(\pi - x)$

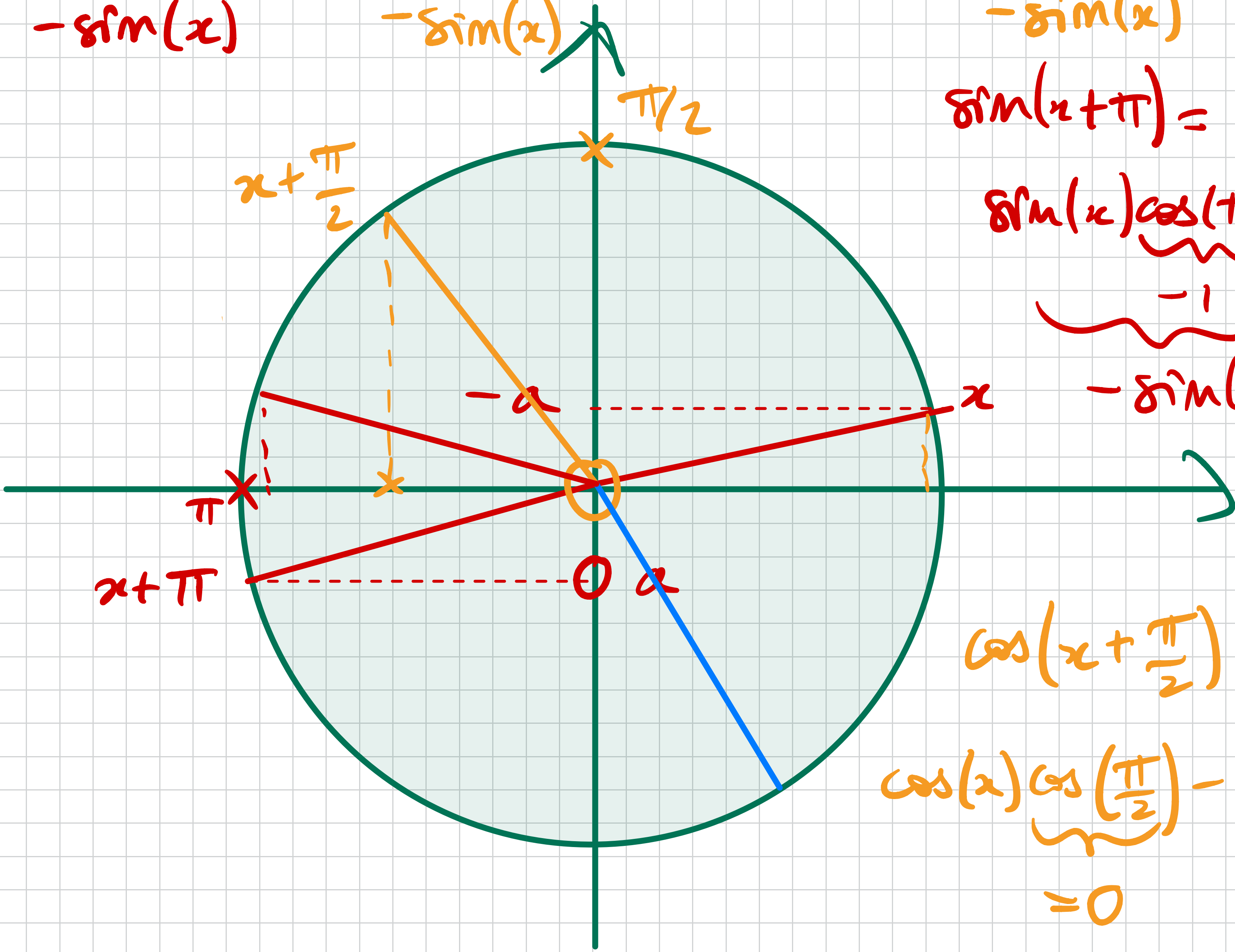
2. Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :

a) $C = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{23\pi}{14}$

b) $D = \sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{11\pi}{5}$

Exercice 3 :

$$A = \underbrace{\sin(x+\pi)}_{-\sin(x)} + \underbrace{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin(x)} + \sin(x) - \underbrace{\sin(-x)}_{-\sin(x)}.$$



$$\sin(x+\pi) = \sin(x)\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + \underbrace{\sin(\pi)}_{0}\cos(x)$$

$$\underbrace{}_{-\sin(x)} \quad + \quad \underbrace{}_{0}$$

$$= -\sin(x).$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin(x)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$$

$$A = -\sin(x) - \sin(x) + \sin(x) - (-\sin(x))$$

$$= -\sin(x) - \sin(x) + \sin(x) + \sin(x).$$

$$= 0.$$

$$B = \cos(x) - \underbrace{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} - \underbrace{\sin(x - \pi)} + \underbrace{\cos(\pi - x)}.$$

$$= \cos(x) - \sin(x) + \sin(x) - \cos(x).$$

$$= 0.$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + \sin(x)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}.$$

$$= \sin(x).$$

$$\sin(x - \pi) = \sin(x)\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} - \underbrace{\sin(\pi)}_{0}\cos(x).$$

$$= -\sin(x).$$

$$\cos(\pi - x) = \underbrace{\cos(\pi)}_{=\,-1}\cos(x) + \underbrace{\sin(\pi)}_{0}\sin(x).$$

$$= -\cos(x).$$

$$C = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}_{} + \underbrace{\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)}_{} + \underbrace{\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)}_{} + \underbrace{\cos\left(\frac{23\pi}{14}\right)}_{}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) \qquad \underbrace{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + \frac{9\pi}{14}\right)}_{}.$$

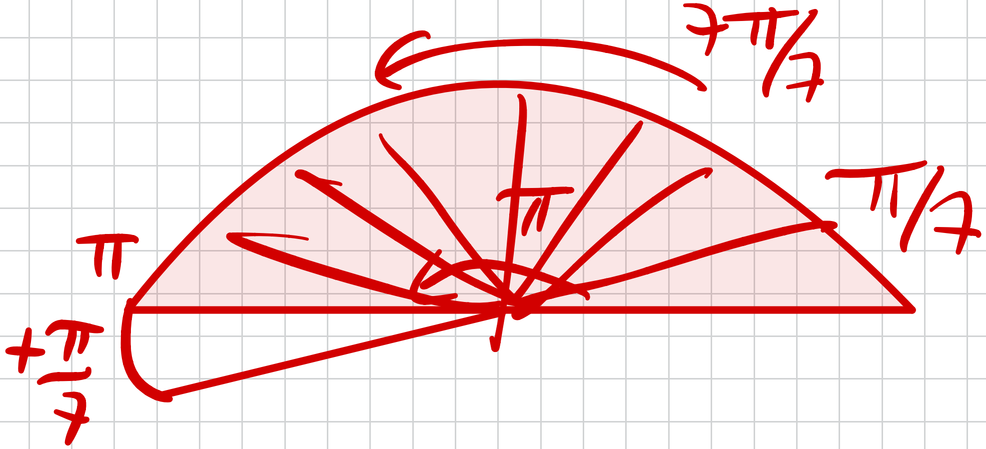
de la forme

$$\cos(\pi + x).$$

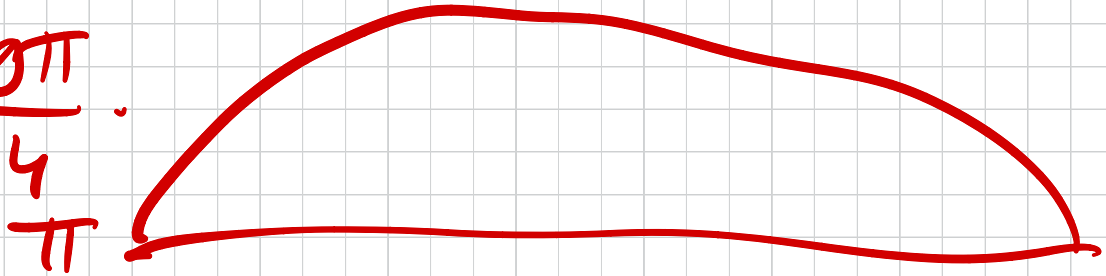
$$= \underbrace{\cos(\pi)}_{-1}\cos(x) - \underbrace{\sin(\pi)}_{0}\sin(x).$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x).$$

$$\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$$



$$\frac{23\pi}{14} = \pi + \frac{9\pi}{14}.$$



$$C = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)$$

$$= 0.$$

Exercice 4 corrigé disponible

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. Sur $[0;3\pi[$: $\cos x = \cos(-\frac{2\pi}{3})$
2. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

sin(...).

3. Sur $[0;4\pi[$: $\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{5}$
4. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{4}$
5. Sur $]-\pi;\pi]$: $\cos x > \frac{-\sqrt{2}}{2}$
6. Sur $]-\pi;2\pi]$: $\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. Sur $[0;2\pi[$: $\sin^2 x = \frac{1}{2}$
8. Sur $]-\pi;\pi]$: $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Exercice 5 corrigé disponible

En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

1. $A = \cos(x-\pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$
2. $B = \sin x + \cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos x - \sin(x+\frac{\pi}{2})$

Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :

3. $C = \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{11\pi}{8} + \sin\frac{13\pi}{8}$
4. $D = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{9\pi}{10}$

$$\begin{cases} \frac{11\pi}{8} = \pi + \frac{3\pi}{8}. \\ \frac{13\pi}{8} = \pi + \frac{5\pi}{8}. \end{cases}$$

Exercice 6 corrigé disponible

Soient $x \in [-\pi;\frac{\pi}{2}]$ et M le point du cercle trigonométrique associé à x.

1. Sur le cercle trigonométrique, placer M tel que $cos(x) = -\frac{3}{4}$.

2. Calculer $sin(x)$.

3. Calculer :

a. $cos(\frac{\pi}{2}+x)$ **b.** $sin(\frac{\pi}{2}-x)$ **c.** $cos(\pi+x)$ **d.** $sin(\pi-x)$

Exercice 7 corrigé disponible

Compléter avec $\cos x$, $\sin x$, $-\cos x$ ou $-\sin x$:

$\cos(-x)=\dots$

$\sin(-x)=\dots$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\dots$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\dots$

$\cos(\pi+x)=\dots$

$\sin(\pi+x)=\dots$

$\cos(\pi-x)=\dots$

$\sin(\pi-x)=\dots$

$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=\dots$

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\dots$

Exercice 8 corrigé disponible

On sait d'un réel x que $x\in[0;\pi]$ et $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

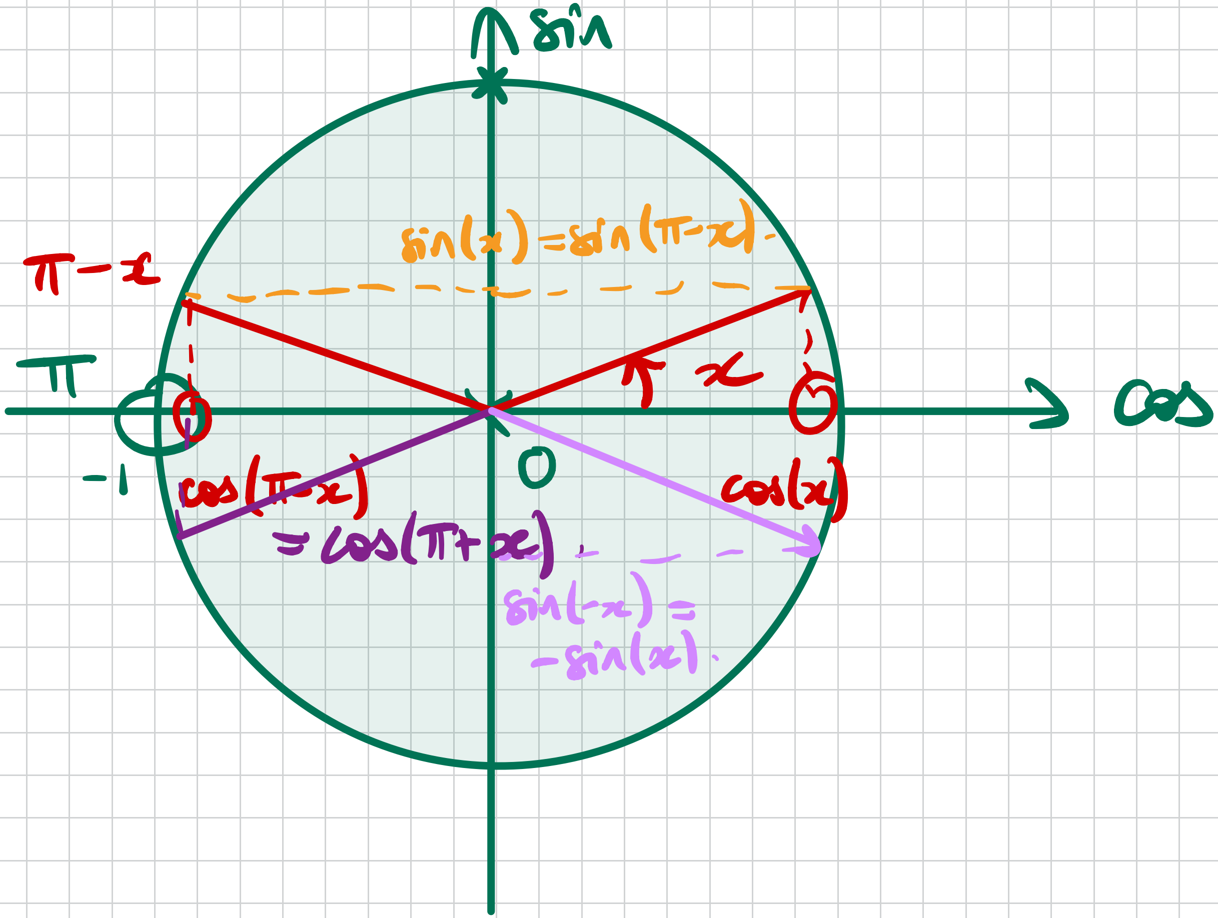
1. Déterminer la valeur exacte de $\sin x$.
2. On sait que le réel x cherché est l'un des réels $\left\{-\frac{4\pi}{5};-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right\}$. Qui est x ? Justifier.

Exo 5 :

$$A = \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x).$$

$$\cdot \cos(\pi - x) = \cos(\pi)\cos(x) + \sin(\pi)\sin(x).$$

$$= -1 \times \cos(x) + 0 \times \sin(x) = -\cos(x).$$



- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

- $\cos(\pi + x) = \cos(\pi)\cos(x) - \sin(\pi)\sin(x)$
$$= -1 \times \cos(x) - 0 \times \sin(x).$$
$$= -\cos(x)$$

- $\sin(-x) = -\sin(x)$.

$$A = -\cos(x) - \cancel{\sin(x)} - \cos(x) - (\cancel{-\sin(x)}).$$
$$= -2\cos(x).$$

$$B = \sin(x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$$= \cos(x) \times 0 - \sin(x) \times 1$$

$$= -\sin(x)$$

- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cos(x).$

$$= \sin(x) \times 0 + 1 \times \cos(x).$$

$$= \cos(x).$$

$$B = \sin(x) - \sin(x) + \cos(x) - \cos(x),$$

$$\boxed{B = 0.}$$

$$C = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{8}\right)$$

$$\begin{cases} \pi + \frac{3\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{11\pi}{8}. \\ \pi + \frac{5\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{13\pi}{8}. \end{cases}$$

$=$

$$x = \frac{3\pi}{8}.$$

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

$$\sin(\pi + x) = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right).$$

$$= -\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right).$$

$$\sin(\pi + x) =$$

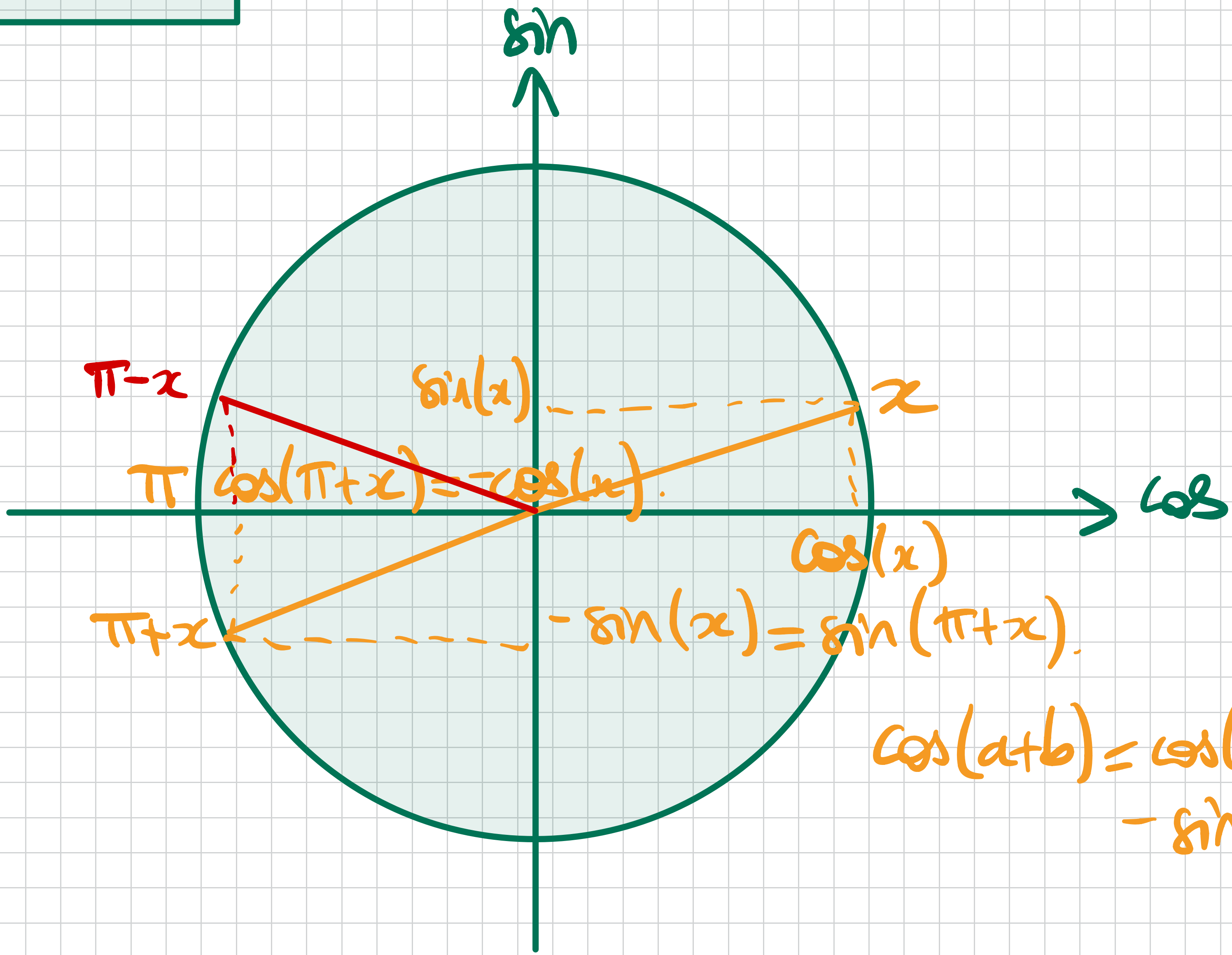
$$\underbrace{\sin(\pi)}\cos(x) + \sin(x)\underbrace{\cos(\pi)}$$

$$= 0 \times \cos(x) + \sin(x) \times (-1)$$

$$= -\sin(x).$$

Donc : $C = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

$$\boxed{C = 0}$$



$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

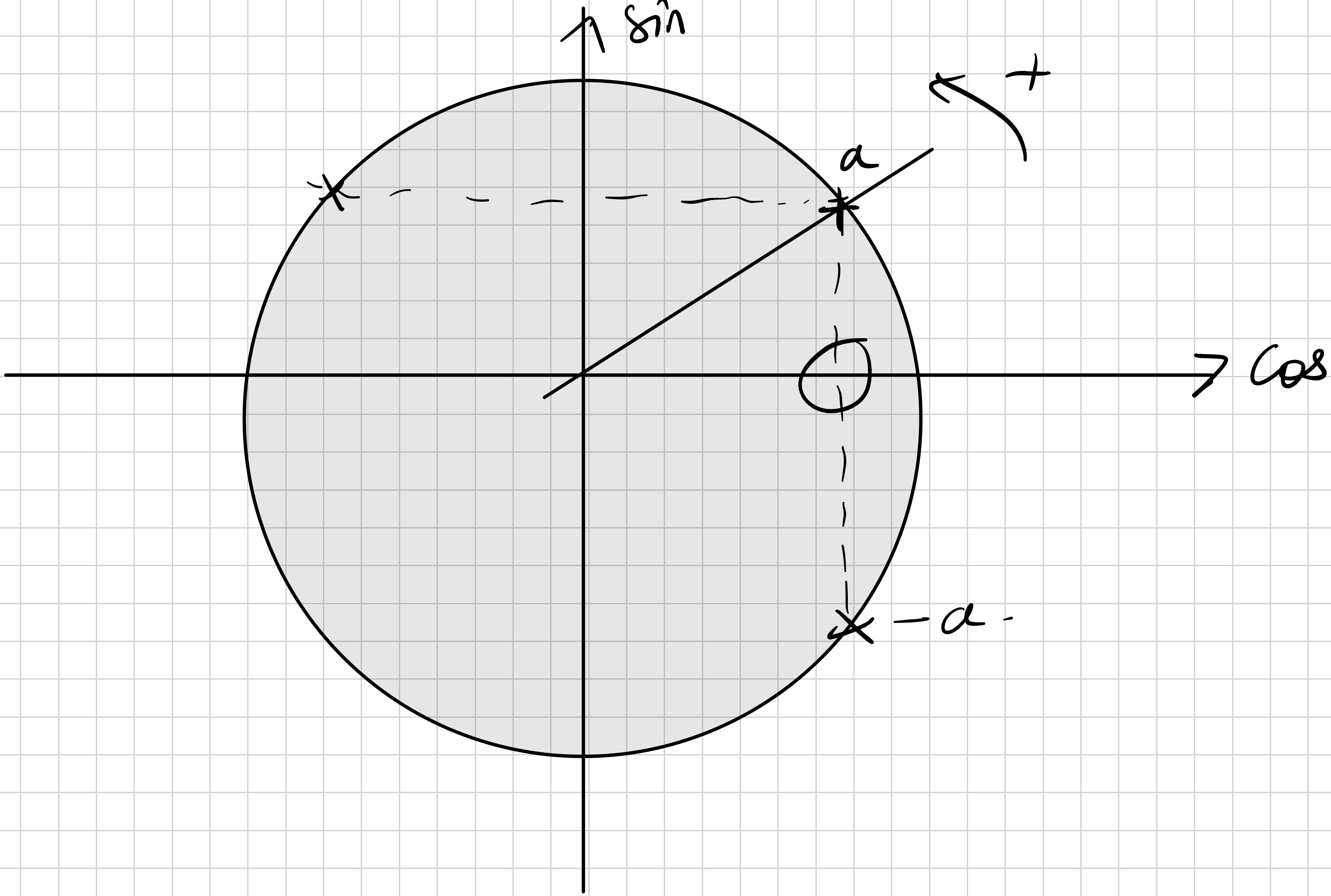
$$\Delta = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right).$$

$$\begin{cases} \dfrac{3\pi}{5} = \pi - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{5\pi - 2\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{5}. \\[2ex] \dfrac{9\pi}{10} = \pi - \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{10\pi - \pi}{10} = \dfrac{9\pi}{10}. \end{cases}$$

$$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x).}$$

$$\Delta = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\boxed{\Delta = 0.}$$



$$\cos(x) = \cos(a).$$

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 4 :

1) $\cos(x) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ sur $[0 ; 3\pi[$.

$$\begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ à déterminer.}$$

. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

V . $k = 0$: $x = \frac{2\pi}{3} \in [0 ; 3\pi[$

V . $k = 1$: $x = \frac{2\pi}{3} + 2 \times 1 \times \pi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \in [0 ; 3\pi[$.

X . $k = -1$: $x = \frac{2\pi}{3} + 2 \times (-1) \times \pi = \frac{2\pi}{3} - 2\pi < 0 \notin [0 ; 3\pi[$.

X . $k = 2$: $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi > 3\pi \notin [0 ; 3\pi[$.

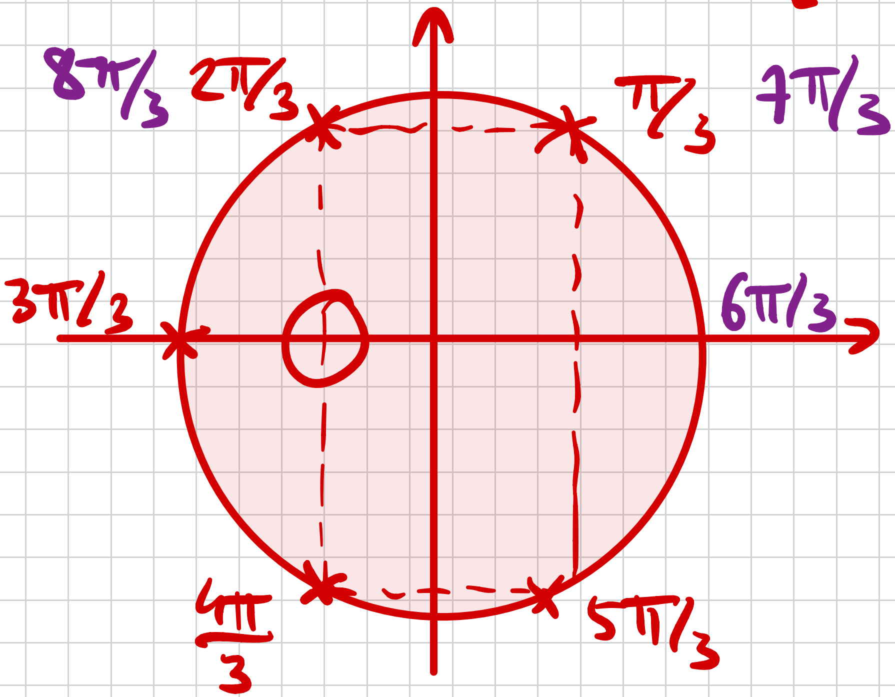
- $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi.$

X. $k = 0$: $x = -\dfrac{2\pi}{3} \notin [0, 3\pi[.$

V. $k = 1$: $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3} \in [0; 3\pi[.$

X. $k = 2$: $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi = \dfrac{10\pi}{3} \notin [0; 3\pi[.$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{4\pi}{3} ; \dfrac{8\pi}{3} \right\}.$

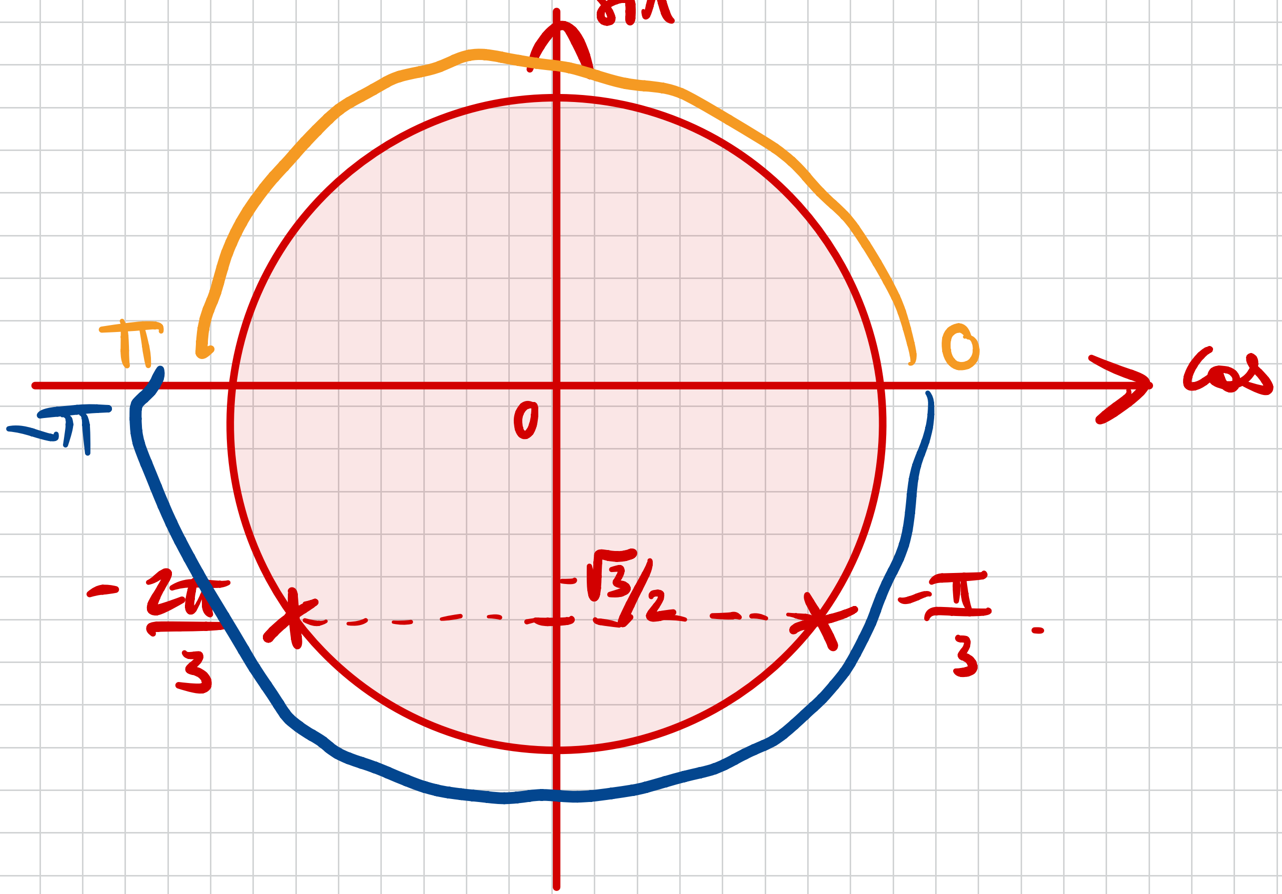


: tour 1.

: tour 2.

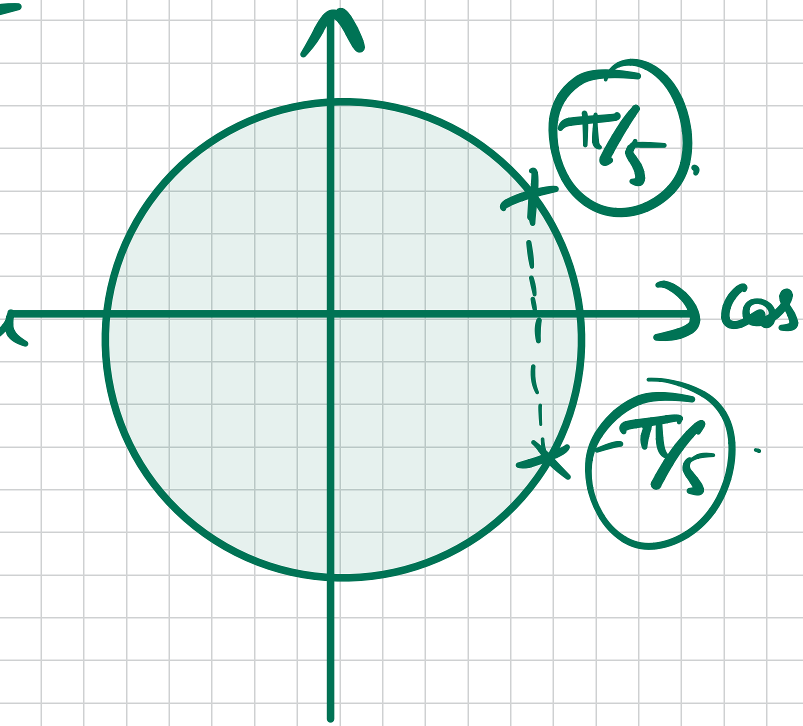
2) $\sin(x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi ; \pi]$.

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ -\dfrac{2\pi}{3} ; -\dfrac{\pi}{3} \right\}$.



3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ sur $[0;4\pi[$.

$$\begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{5}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{5}+2k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \text{ à déterminer}$$



$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x=-\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \text{ à déterminer.}$$

$$\begin{cases} x_1=-\frac{\pi}{20}+2k\pi \\ x_2=-\frac{9\pi}{20}+2k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z} \text{ à déterminer.}$$

• On remarque que pour $k=0$: $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$
donc, on commence à chercher pour $k = 1$:

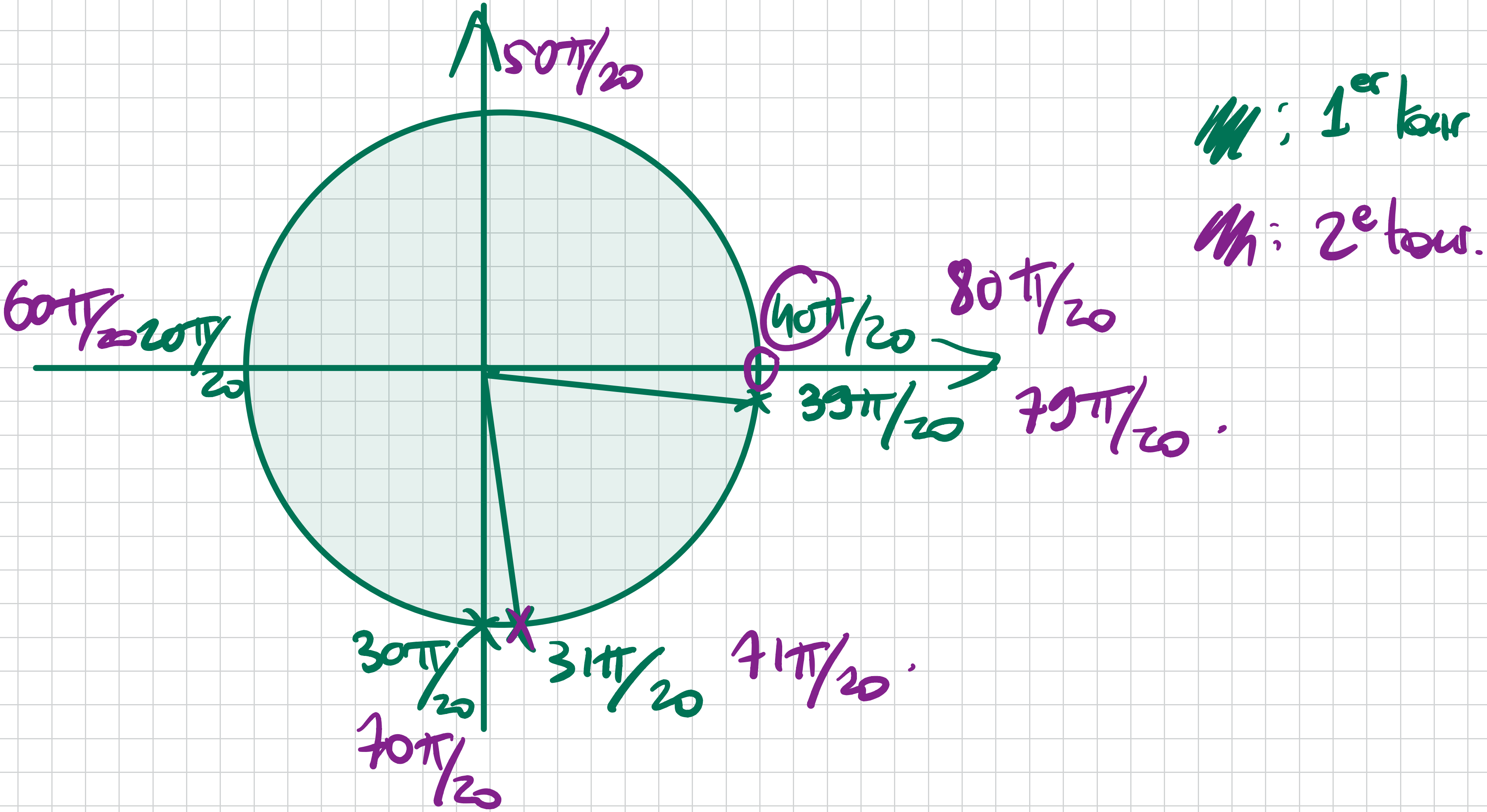
• $k = 1$: ✓ $x_1 = \frac{-\pi}{20} + 2\pi = \frac{39\pi}{20} \in [0; 4\pi[$.

✓ $x_2 = \frac{-9\pi}{20} + 2\pi = \frac{31\pi}{20} \in [0; 4\pi[$.

• $k = 2$: ✓ $x_1 = \frac{-\pi}{20} + 4\pi = \frac{79\pi}{20} \in [0; 4\pi[$.

✓ $x_2 = \frac{-9\pi}{20} + 4\pi = \frac{71\pi}{20} \in [0; 4\pi[$.

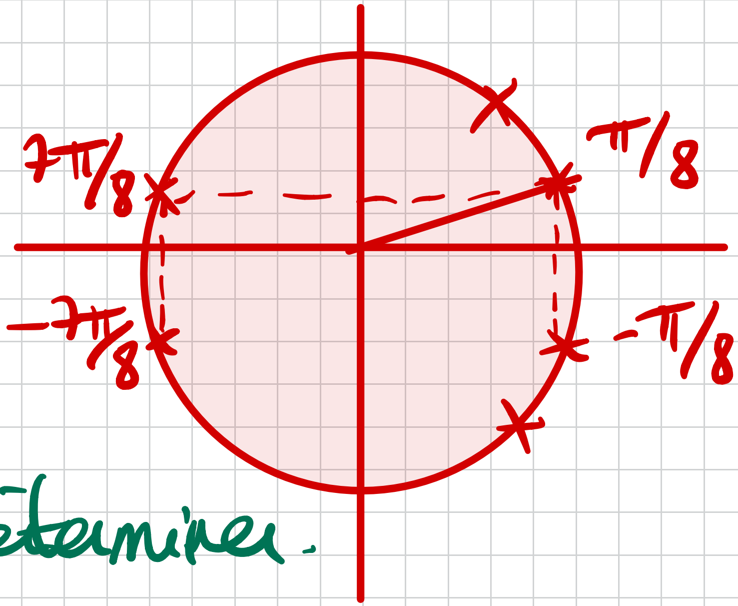
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{31\pi}{20} ; \frac{39\pi}{20} ; \frac{71\pi}{20} ; \frac{79\pi}{20} \right\}$.



: 1er tour
: 2e tour.
50π/20
60π/20
20π/20
40π/20
80π/20
39π/20
79π/20.
30π/20
70π/20
31π/20
71π/20.

4) $\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sur $]-\pi ; \pi]$.

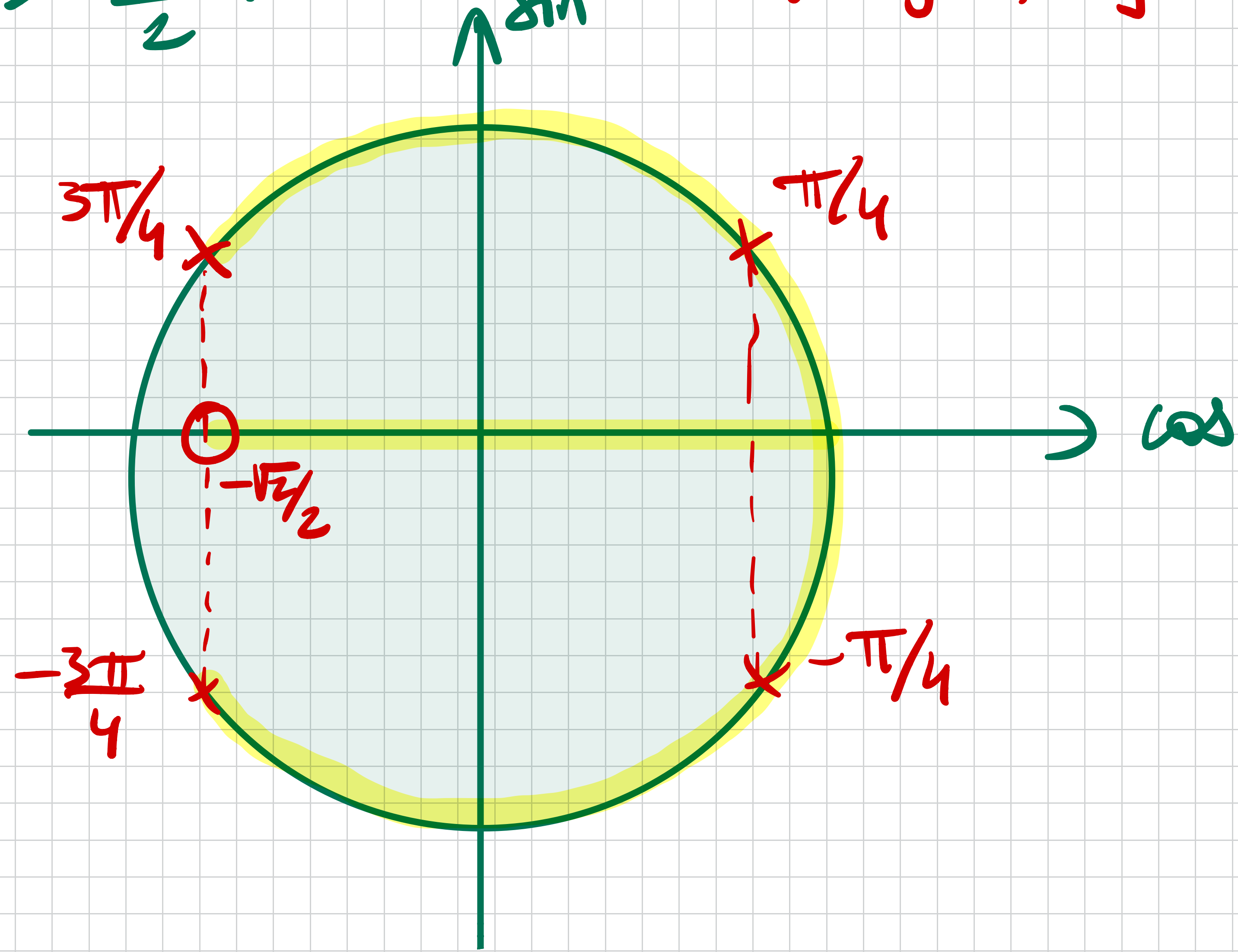
$$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ à déterminer.}$$



$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x_2 = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ à déterminer.}$$

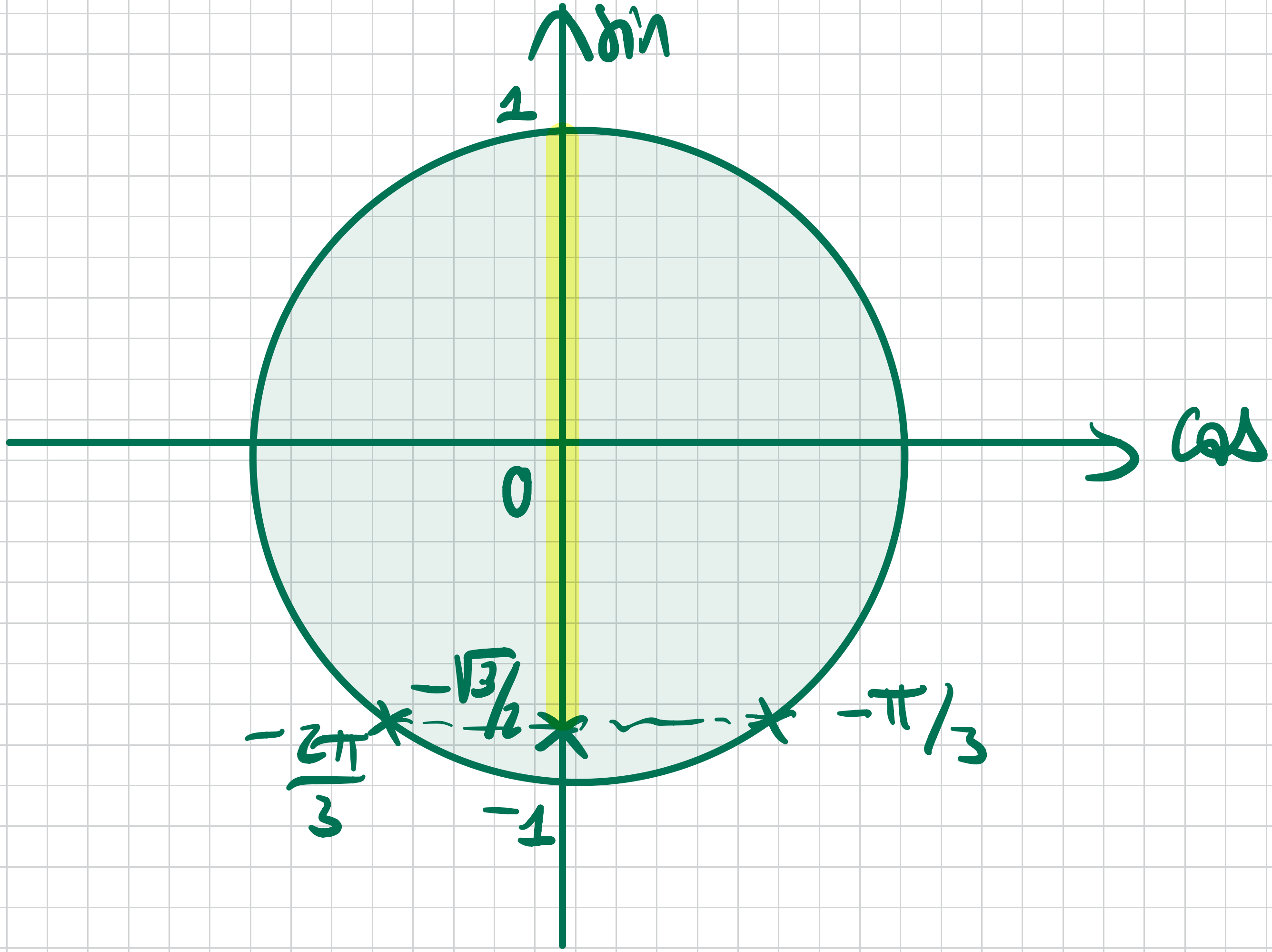
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8} ; \frac{\pi}{8} ; \frac{3\pi}{8} \right\}$.

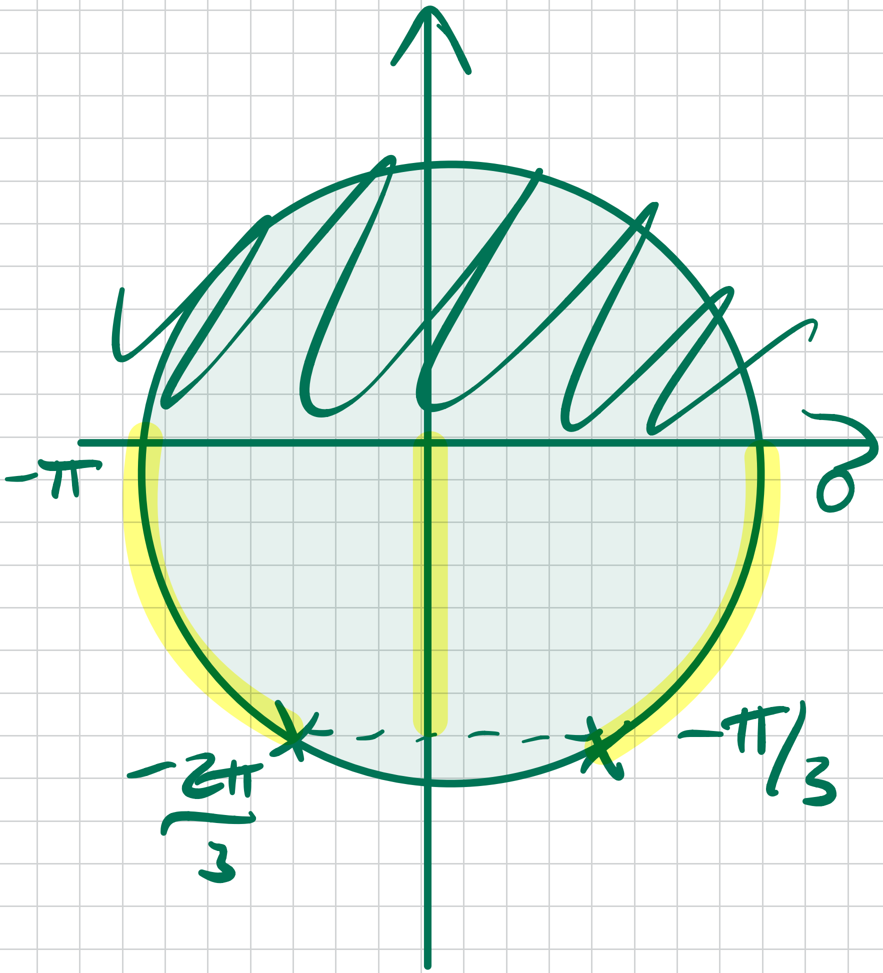
5) $\cos(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. sur $]-\pi;\pi]$.

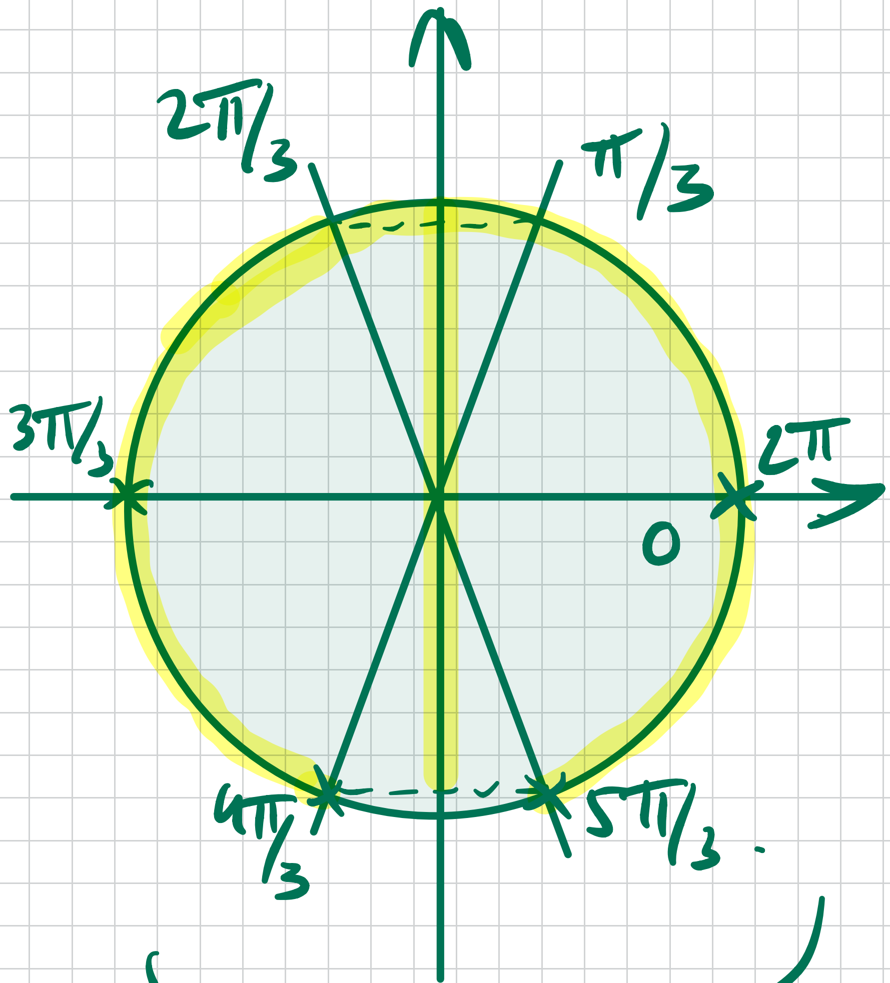


L'ensemble des solutions est : $\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$.

6) $\sin(x) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi ; 2\pi]$.







$$\left[-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3} ; 0\right] \qquad \left[0 ; \frac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right]$$

$$\left]-\pi/3 ; 4\pi/3\right[.$$

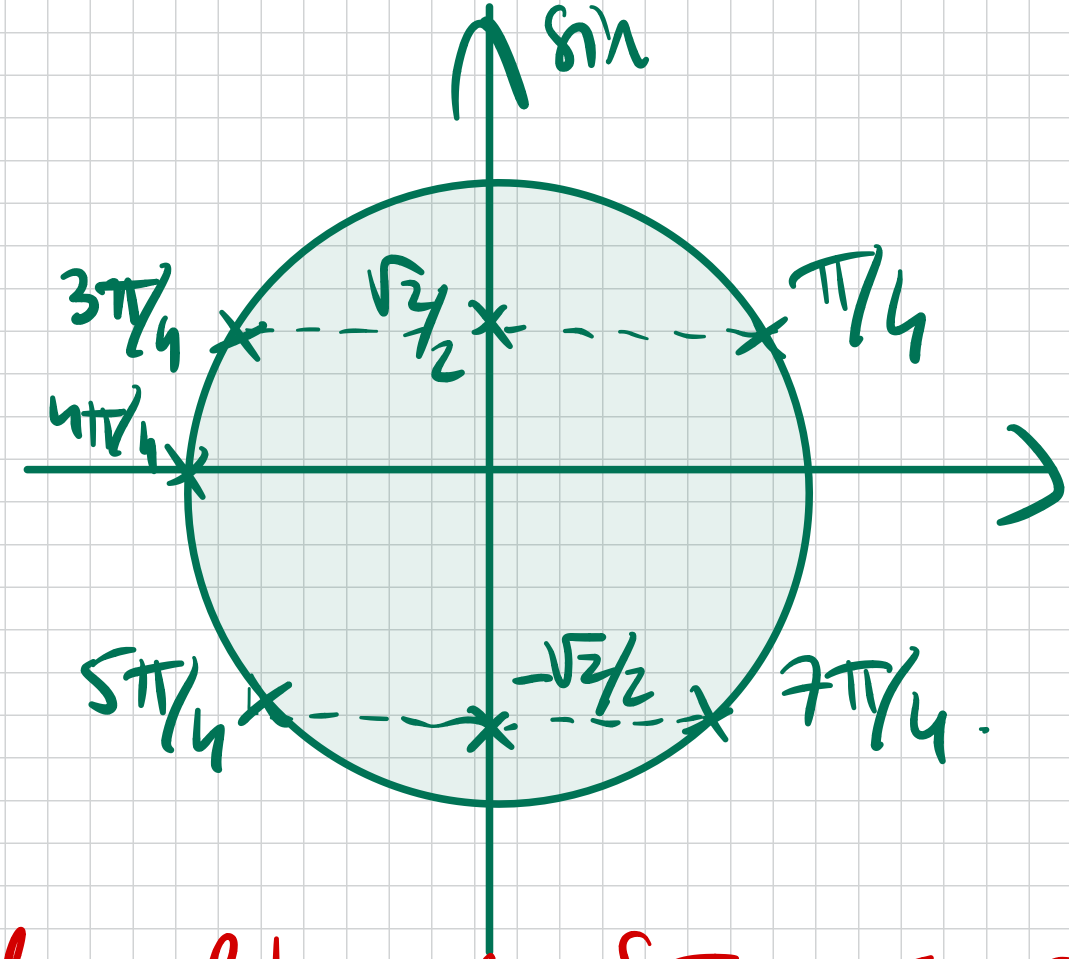
L'ensemble des solutions est : $\left[-\pi ; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}\right[\cup$

$\left]\frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right]$.

7) Sur $[0 ; 2\pi[$: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} \sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \text{ou } \sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



L'ensemble des solutions est : $\left\{ \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4} \right\}$.

8) $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$. sur $]-\pi ; \pi]$.

On pose $X = \cos(x) \in [-1 ; 1]$.

L'équation devient : $2X^2 + X - 1 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$, il y a 2 sol. réelles.

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2 \times 2} = \dfrac{-4}{4} = -1 . \\ X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2 \times 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} . \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{-1 ; \frac{1}{2}\right\}$.

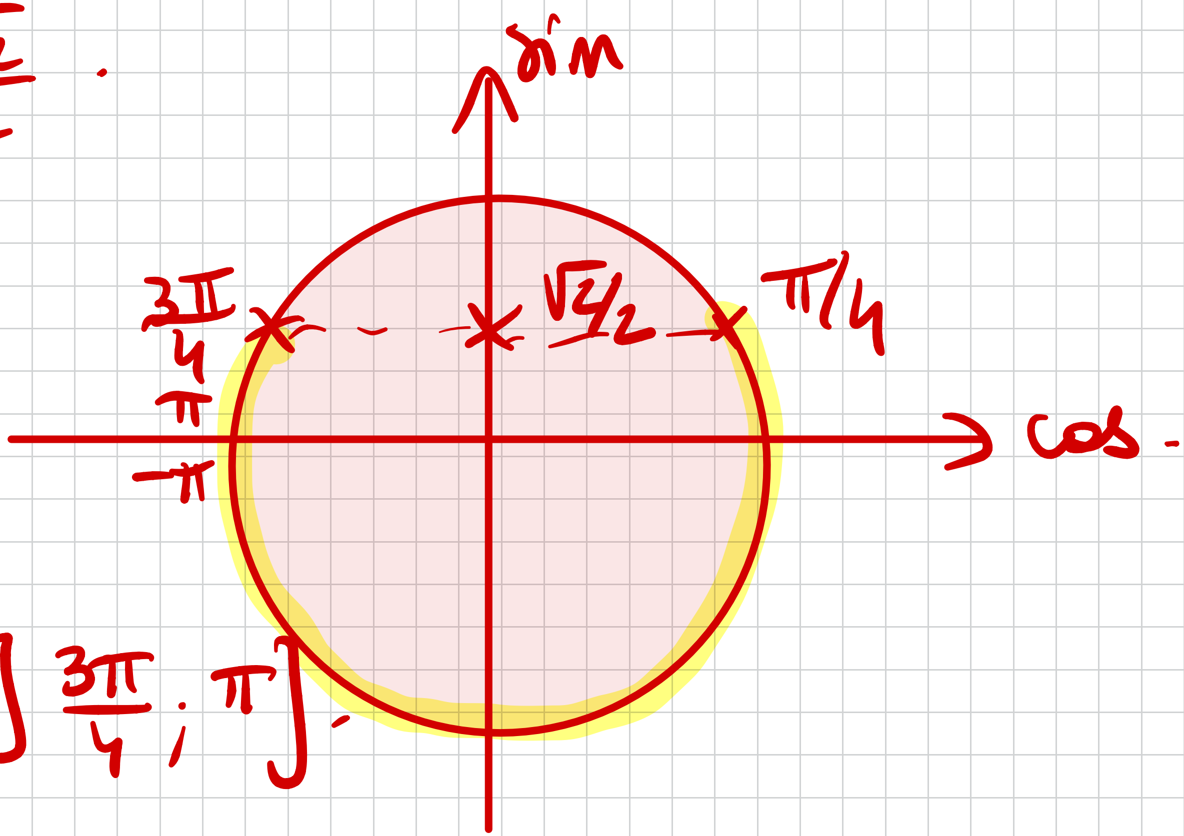
$$\begin{cases} X_1 = -1 \iff \cos(x_1) = -1 \iff x_1 = \pi \text{ ou } \cancel{x_1 = -\pi} \\ X_2 = \frac{1}{2} \iff \cos(x_2) = \frac{1}{2} \iff x_2 = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x_2 = \frac{-\pi}{3}. \end{cases}$$

$$\in]-\pi ; \pi].$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} ; \pi \right\}.$

$\sin(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

sur $]-\pi ; \pi]$.



$S =$

$\left[-\pi ; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4} ; \pi\right]$.

$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\pi - x$.

$\frac{\pi}{3} \leftrightarrow \frac{2\pi}{3}$ $\frac{\pi}{4} \leftrightarrow \frac{3\pi}{4}$ $\frac{\pi}{6} \leftrightarrow \frac{5\pi}{6}$

Exercice 9 corrigé disponible

Résoudre l'équation trigonométrique $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [-\pi ; 3\pi]$

c) $\sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 corrigé disponible

a) Résoudre l'équation $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$

b) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 corrigé disponible

Soit x un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. M est le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé à x.

1. Placer le point M tel que $\sin x = \frac{2}{5}$.
2. Placer les points A, B, C et D du cercle associés aux réels $\frac{\pi}{2} + x$, $\frac{\pi}{2} - x$, $\pi + x$ et $\pi - x$.
3. Calculer $\cos x$.
4. Donner les valeurs de :

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; (b) $\sin(\pi - x)$; (c) $\cos(\pi + x)$.

Exercice 12 corrigé disponible

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. Sur $[0; 3\pi[$: $\cos x = \frac{1}{2}$
2. Sur $]-\pi; \pi]$: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Sur $[0; 4\pi[$: $\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$
4. Sur $[0; 2\pi[$: $\cos^2 x = \frac{3}{4}$
5. Sur $]-\pi; \pi]$: $6 - 12\cos x > 0$
6. Sur $]-\pi; 2\pi]$: $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$
7. Sur $]-\pi; \pi]$: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
8. Sur $]-\pi; \pi]$: $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$

Exercice 13 corrigé disponible

1. Résoudre dans $[0; 2\pi[$:

(a) $\cos x = \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)$; (b) $\sin x = \sin \frac{2\pi}{3}$

2. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$:

(a) $\cos x = \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$; (b) $\sin x = \sin \frac{4\pi}{3}$

Exercice 14 corrigé disponible

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous puis déterminer leurs solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$:

$a)$ $\cos s = \frac{1}{2}$ $b)$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$

Exercice 15 corrigé disponible

Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires ou ni l'un ni l'autre ?

1. $f_1(x) = \sin(3x)$.
2. $f_2(x) = -2\cos(x)$.
3. $f_3(x) = 7x\sin(4x)$.
4. $f_4(x) = 3\cos(x) + 1$.

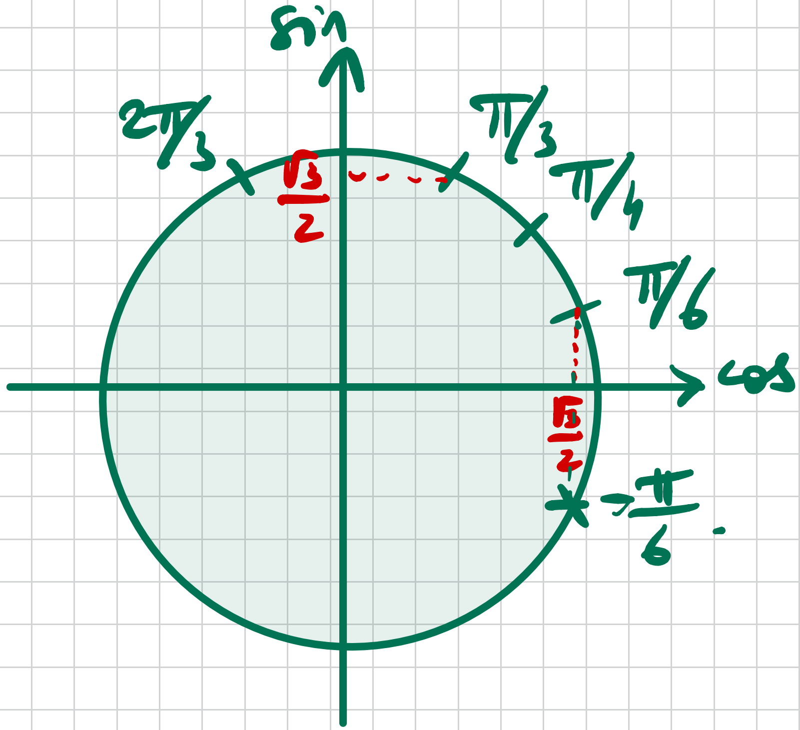
Exercice 16 corrigé disponible

Montrer que les fonctions suivantes sont 2π-périodiques.

1. $f_1(x) = \sin(x) + 1$.
2. $f_2(x) = -2\cos(x) + 1$.
3. $f_3(x) = \sin^2(x) + 1$.
4. $f_4(x) = \cos^2(x) + 2\sin(x) + 1$.

Exo 9 :

$$\sin(x) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \quad \text{sur } [-\pi ; 3\pi].$$



$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. & (1) \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. & (2) \end{cases}$$

(1) : si $k = -1$: $x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$. ✗

si $k = 0$: $x = \frac{\pi}{3} \in [-\pi ; 3\pi]$ ✓

si $k = 1$: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \in [-\pi ; 3\pi]$ ✓.

si $k=2$: $x = \frac{\pi}{3} + 2 \times 2 \times \pi = \frac{\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$. X

(2) : si $k=-1$: $x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi - 6\pi}{3} = \frac{-4\pi}{3}$ X

si $k=0$: $x = \frac{2\pi}{3} \in [-\pi ; 3\pi]$ V

si $k=1$: $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} \in [-\pi ; 3\pi]$ V

si $k=2$: $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3} \in [-\pi ; 3\pi]$ X

L'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{7\pi}{3} ; \frac{8\pi}{3} \right\}}$.

Exo 10 :

$$\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \\ 4x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \ ; \ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \right\}$$

$k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

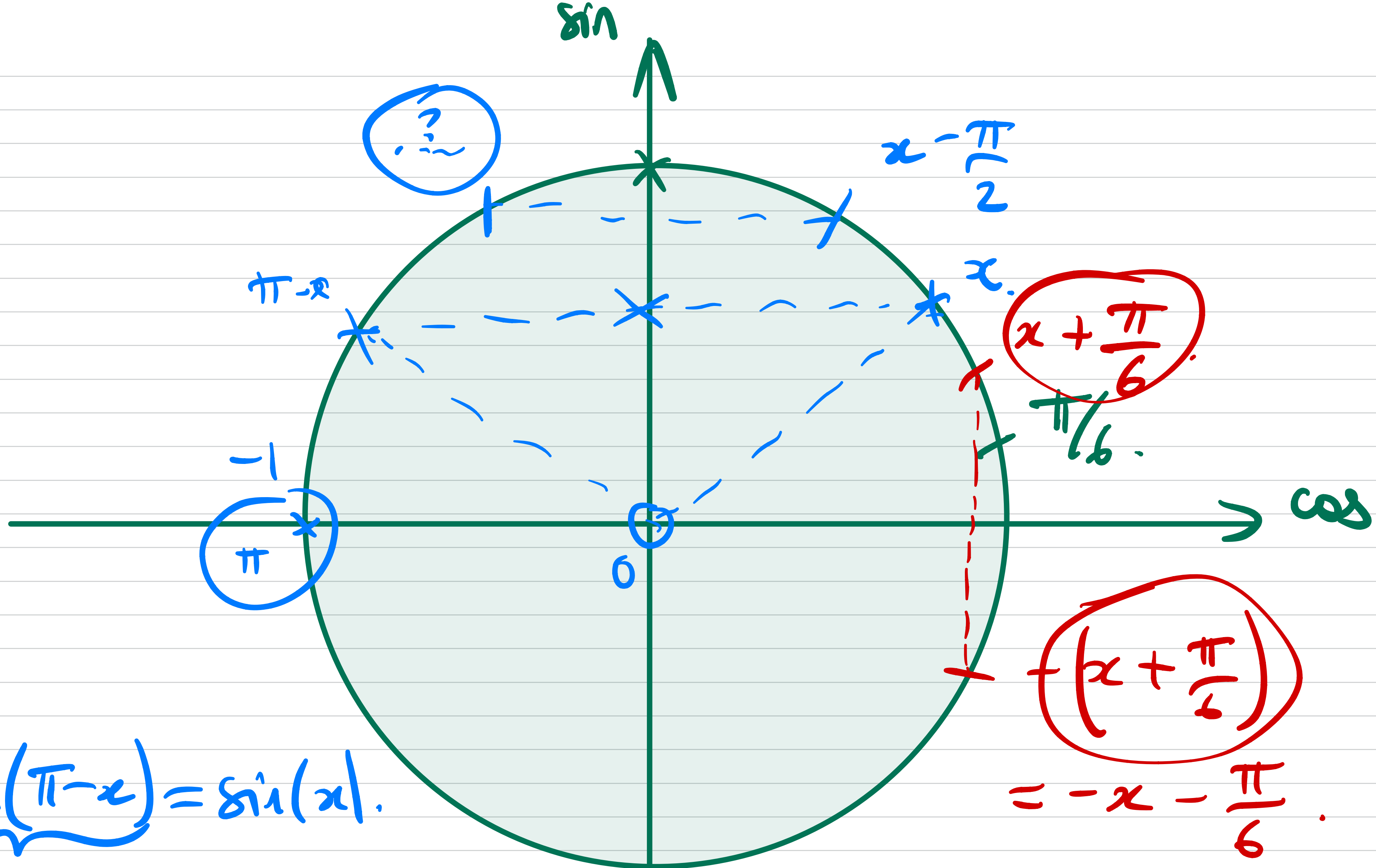
$$\begin{cases} 3x - \frac{2\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \\ 3x - \frac{2\pi}{3} = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \\ 3x + x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \\ \\ 4x = \dfrac{3\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \\ \\ x = \underbrace{\dfrac{3\pi}{24}}_{\frac{\pi}{8}} + \dfrac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

L'ensemble des sol : $S = \left\{ \dfrac{5\pi}{12} + k\pi ; \ \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \right\}, \ k \in \mathbb{Z}.$



$\underbrace{\sin(\pi - x)} = \sin(x).$

$\sin(\pi - x) = \underbrace{\sin(\pi)}_{0}\cos(x) - \sin(x)\cos(\pi).$

$0 \cancel{\times \cos(x)} - \sin(x) \times (-1) = \sin(x).$

c) $\sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

$\frac{3\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$. $\quad \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{cases} 3x + \frac{5\pi}{6} = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \\ \\ 3x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - x = -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \\ \\ 3x + x = -\frac{5\pi}{6} + \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{-4\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \\ 4x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

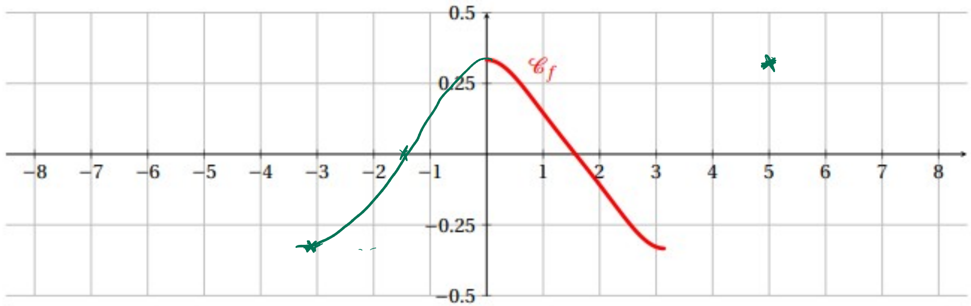
$$\begin{cases} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

L'ensemble des sol. est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ -\dfrac{2\pi}{3} + k\pi \, ; \, \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}.}$

Exercice 17 corrigé disponible

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)}$.

1. Montrer que f est paire. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que f est périodique de période 2π. Interpréter graphiquement.
3. En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.
4. Ci-dessous, on donne $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f sur I. Compléter sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$.



Exercice 18 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-3 \leq f(x) \leq 3$
2) Déterminer la parité de la fonction f
3) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)$. En déduire que f est périodique et préciser sa période.

Exercice 19 corrigé disponible

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ où x désigne un réel.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal où 3 cm représente π sur l'axe des abscisses et 2cm représente une unité sur l'axe des ordonnées.

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que, pour tout réel x, le dénominateur $2+\cos x$ ne s'annule jamais.
2.
   a. Démontrer que f est périodique de période 2π.

   b. Démontrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

   c. A l'aide des deux questions précédentes démontrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$.

Exo 17 :

1) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)}$.

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant \sin^2(x) \leqslant 1$$

$$3 \leqslant 3+\sin^2(x) \leqslant 4 \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ 3+\sin^2(x) > 0.$$

Donc <u>f est définie sur $\mathbb{R}$</u>.

par parité de $x \mapsto \cos(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{3+\sin^2(-x)} = \dfrac{\cos(x)}{3+\sin(-x)\times\sin(-x)}$

par imparité $x \mapsto \sin(x)$.

$$= \frac{\cos(x)}{3-\sin(x)\times(-\sin(x))}$$

$$= \frac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)} = f(x).$$

Donc $f(-x) = f(x)$: $\underline{f \text{ est paire}}$.

Donc f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$:

par 2π-périodicité de $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$

$$f(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{3+\sin^2(x+2\pi)} = \frac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)} = f(x).$$

Donc $f(x+2\pi) = f(x)$: f est 2π-périodique.

On peut restreindre l'étude graphique de la fonction à l'intervalle $[0;2\pi]$. (translation de 2π)

3) Par 2π-périodicité : $I = [0;2\pi]$ puis par symétrie axiale : (parité de f).

$$\boxed{I = [0 ; \pi]}$$

4) Voir graphique.

Exercice 18 corrigé disponible

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-3 \leq f(x) \leq 3$
2) Déterminer la parité de la fonction f
3) Montrer que pour tout $\in \mathbb{R}$, $f(x + \pi) = f(x)$. En déduire que f est périodique et préciser sa période.

1) $f(x) = 3\cos(\underbrace{2x + \frac{\pi}{2}}_{\in \mathbb{R}})$. On pose $X = 2x + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

$$-1 \leq \cos(X) \leq 1$$

$\times 3$: ne change pas le sens de l'inégalité.

$$-3 \leq 3\cos(X) \leq 3.$$

D'où le résultat.

2) $f(-x) = 3\cos\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = 3\underbrace{\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= 3\left[\cos(2x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(2x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

$$= 3\left[\cos(2x) \times 0 - \sin(2x) \times 1\right]$$

$$f(x) = -3\sin(2x).$$

Donc : $f(-x) = -3\sin(-2x) = 3\sin(2x) = -f(x)$.

Donc : f est impaire : symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) $f(x+\pi) = 3\cos\left(2(x+\pi)+\frac{\pi}{2}\right)$

$= 3\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)$.

$= 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

$= f(x)$.

par 2π-périodicité de $x \mapsto \cos(x)$.

Donc f est π-périodique

Donc intervalle d'étude : $[0;\frac{\pi}{2}]$ par symétrie centrale.

$[0;\pi]$.