

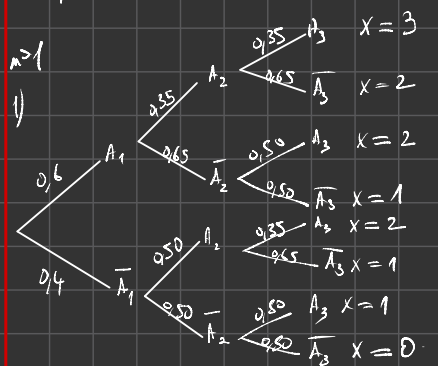
Amerique du nord 27 mars 2023.

5) a) de programme Python fonction(m) renvoie les valeurs des suites  $L_m$  et  $l_m$ .  
 D'où, d'après le calculatrice,  
 $L_3 \approx 3,316643$

$l_3 + l_3 = 11$   
 $l_3 = \frac{11}{2} = \frac{11}{2} \approx 5,5$

À la 3<sup>ème</sup> itération, les dimensions du rectangle sont:  
 $L_3 = 3,316643$   
 $l_3 = 3,316661$

Amerique du sud 27 septembre 2023.



d)  $P(X=2) = P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$   
 $= 0,6 \times 0,35 \times 0,65 + 0,6 \times 0,65 \times 0,50 + 0,4 \times 0,50 \times 0,35$   
 $= 0,4015$

b) On a:

$x = x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,425	0,4015	0,0735

$P(X=1) = 1 - P(\bar{X}=1)$   
 $P(\bar{X}=1) = 1 - (0,1 + 0,4015 + 0,0735)$   
 $P(X=1) = 0,425$

b)  $E(X) = \sum_{i=0}^3 P(X=x_i) \times x_i$

$E(X) = 0,1 \times 0 + 0,425 \times 1 + 0,4015 \times 2 + 0,0735 \times 3 = 1,4485$

c) Sur 3 tirés, le tireur réussira en moyenne 1,4485 fois

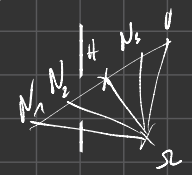
Pointe B:

1) a)  $N \in \mathbb{N}^*$   
 L'expérience est bien une épreuve de Bernoulli.  
 On répète 15 fois de manière indépendante et identique. Plus la variable aléatoire  $Y$  qui compte le nombre de joueurs gagnants suit la loi binomiale de paramètres  $\mathcal{B}(15; 0,0735)$   
 $P(Y=2) = \binom{15}{2} \times p^2 \times (1-p)^{13}$

On répète cette épreuve 15 fois de manière indépendante et identique. Plus la variable aléatoire  $Y$  qui compte le nombre de joueurs gagnants suit la loi binomiale de paramètres  $\mathcal{B}(15; 0,0735)$

b)  $P(Y=5) = \binom{15}{5} \times 0,0735^5 \times (1-0,0735)^{10}$

$P(Y=5) = 0,003$



2)  $N \in \mathbb{N}^* \mathcal{B}(0,0735; N)$

$P(Y \geq 1) \geq 0,98$   
 $1 - P(Y=0) \geq 0,98$   
 $-P(Y=0) \geq -0,02$   
 $P(Y=0) \leq 0,02$   
 $\binom{N}{0} \times 0,0735^0 \times (1-0,0735)^N \leq 0,02$   
 $0,9265^N \leq 0,02$   
 $\ln(0,9265^N) \leq \ln(0,02)$   
 $n \ln(0,9265) \leq \ln(0,02)$   
 $n \geq \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,9265)}$   
 $n \geq 52$

exercice 22.

1)  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$   $B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$   $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$   $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 $1 \times (-2) - (-1) \times (-2) = -4 \neq 0$   
 donc  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont non colinéaires. Ils définissent un plan.

2) On a:  
 d'une part:  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 0$   
 d'autre part:  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 1 \times (-2) + 1 \times 3 = 0$

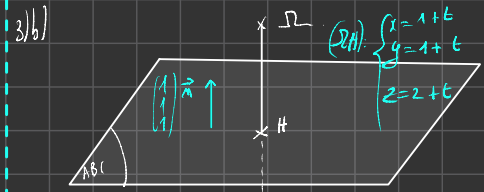
On remarque que  $\vec{n}$  est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (ABC):  $\vec{n} \perp (ABC)$

b) Une eq cartésienne de (ABC) de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est:  $x + y + z + d = 0$

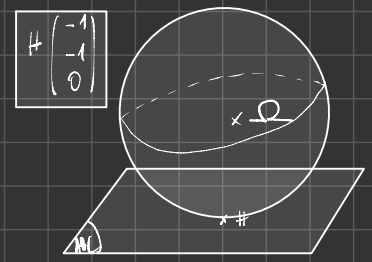
On a  $A \in (ABC)$   
 $1 + 1 - 4 + d = 0$   
 $d = 2$

Finalement: (ABC):  $x + y + z + 2 = 0$

3) a) Vérifions si  $\Omega \in (ABC)$   
 $x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 2 = 0$   
 $= 1 + 1 + 2 + 2 = 6 \neq 0$   
 $\Omega \notin (ABC)$

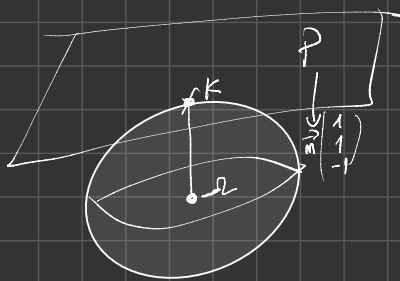
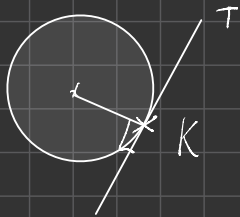


3) b)  $1t + 1t + 2t + 2 = 0$   
 $6 + 3t = 0$   
 $t = -2$   
 $\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = 2 = 0 \end{cases}$



On cherche le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur (ABC). Autrement dit  $\Omega H$  est la plus petite distance entre  $\Omega$  et le plan (ABC)

Autrement dit,  $N \notin S$   
 $\Omega H \perp \Omega N$



5) Vérifions que K appartient bien à P: (1)

$K \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  (P):  $x+y-z-6=0$ .

$3+3-0-6 = 6-6 = 0$ .

$K \in P$ .

Vérifions que K est sur J:

$K \in J \Leftrightarrow \Omega K = R$

$\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Omega K = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2 + (0-2)^2}$

$\Omega K = \sqrt{4+4+4}$

$\Omega K = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = R$

$K \in J$ .  
Donc  $K \in J \cap P$ .

Démontrons que  $\Omega K$  est colinéaires à  $\vec{n}$

$\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega K} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega K} = 2\vec{n}$   
donc  $\vec{\Omega K}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires.

$\vec{\Omega K}$  est orthogonal à P.

\*  $K \in P \cap S$

\*  $(\Omega K) \perp P$

$\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ x+y-z-6=0 \\ y=t \end{cases}$

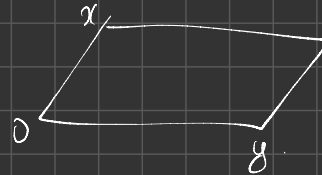
$\begin{cases} x+t+z+2=0 \\ x+t-z-6=0 \\ (y=t) \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+2t-4=0 \\ y=t \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = -2t+4 \\ y=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t+2 \\ y=t \\ -t+2+t+z+2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t+2 \\ y = t \\ z = -4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$y = t \quad \vec{u} \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 \\ z_2 \end{pmatrix}$



(d)  $\vec{x} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{y} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

1)  $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$

$u_1 = 5 \times u_0 - 8 \times 0 + 6$

$u_1 = 5 \times 0 - 0 + 6 = 6$

$u_2 = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 + 6 = 28$

2.  $u = 0$

$u = 5u - 8(i-1) + 6$

return u.

3) a)  $(P_m) \ll u_n \geq 2n \gg$

Initialisation:  $u_0 = 0 \quad 2 \times 0 = 0$   
 $u_0 \geq 2 \times 0$

$P_0$  est vraie

Hérédité: Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $(P_n)$  est vraie  $u_n \geq 2n$ . Montrons que  $(P_{n+1})$  est vraie  $u_{n+1} \geq 2(n+1) = 2n+2$ .

Par hyp de récurrence:  $u_n \geq 2n$

$5u_n \geq 10n$

$5u_n - 8n \geq 2n$

$5u_{n+1} - 8(n+1) \geq 2(n+1) \geq 2n+2$

$u_{n+1} \geq 2n+2$

$P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Ecl:  $P_0$  est vraie et  $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 2n$

b.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

D'après le théorème de comparaison.

c.  $p \in \mathbb{N}^*$ . Par définition,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$

En particulier, pour  $A = 10^p$ , donc bien:

$\forall n \geq n_0, u_n \geq 10^p$

4) Soit  $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n$

$= 5u_n - 8n + 6 - u_n$

$= 4u_n - 8n + 6$

Or  $u_n \geq 2n$

$4u_n \geq 8n$

$4u_n - 8n \geq 0$

$4u_n - 8n + 6 \geq 6$

$u_{n+1} - u_n \geq 6 \geq 0$

$(u_n)$  est croissante.

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_n - 2n + 1$ .

$v_{n+1} = 5v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1$

$v_{n+1} = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1$

$v_{n+1} = 5u_n - 10n + 5$

$v_{n+1} = 5(u_n - 2n + 1)$

$v_{n+1} = 5v_n$

$v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 1$   
 $v_0 = 0 - 0 + 1 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$

5.  $v_n = v_0 \times 5^n = 1 \times 5^n = 5^n$

On  $v_n = u_n - 2n + 1$

$u_n = v_n + 2n - 1$

$u_n = 5^n + 2n - 1$

m4: a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$  } Par composition de limites:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = 0$  }  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x = +\infty$  Par somme de  $\alpha$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2)a)  $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$f'(x) = \frac{-e^{-x}/e^x}{(1+e^{-x})e^x} + \frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{-1 \times 4}{(e^x + 1) \times 4} + \frac{1 \times (e^x + 1)}{4 \times (e^x + 1)}$

$f'(x) = \frac{-4 + e^x + 1}{4(e^x + 1)}$

$f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$

2)b)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad 4(e^x + 1) > 0$

le signe de  $f'(x)$  ne dépend que de  $e^x - 3$ .

On  $e^x - 3 > 0$

$e^x > 3$  } on applique  $x \rightarrow \ln(x)$   
 $x > \ln(3)$  et sur  $]0, +\infty[$

$x$	$-\infty$	$\ln(3)$	$2,5$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	
$f$	↗ ↘			

1) Sur  $[2,5]$   $f$  est  $\nearrow$  et continue

$f(2) = \ln(1 + e^{-2}) + \frac{1}{4} \times 2 < 1$

$f(5) = \ln(1 + e^{-5}) + \frac{1}{4} \times 5 > 1$

Après le corollaire du théorème des

valeurs intermédiaires il y a  $f(x) = 1$  admet une sol<sup>o</sup> unique sur  $[2,5]$ .

♪ Baccalauréat Amérique du Sud 27 septembre 2023 ♪  
 ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

**Exercice 1**

**5 points**

**Partie A**

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante.

On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de 0,6.

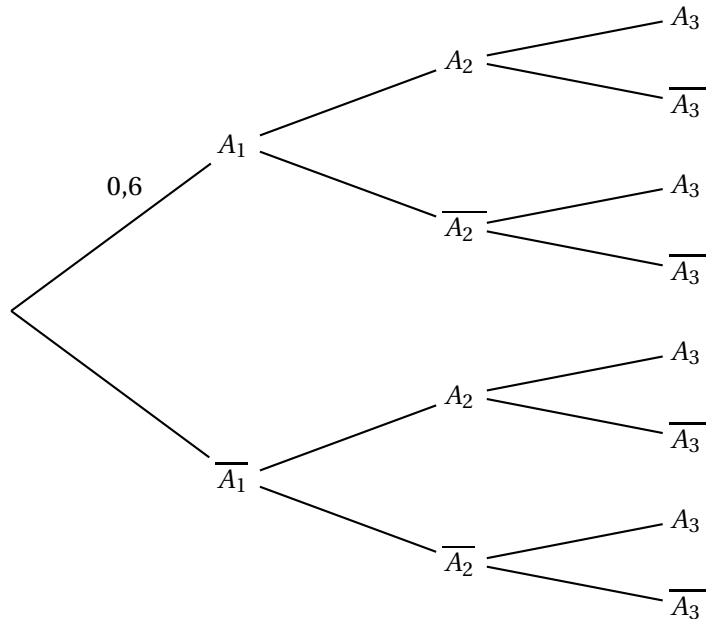
Pour tout évènement  $A$ , on note  $p(A)$  sa probabilité et  $\bar{A}$  l'évènement contraire de  $A$ .

On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.

On considère les évènements suivants :

- $A_1$  : « Le joueur atteint la cible lors du 1<sup>er</sup> tir »
- $A_2$  : « Le joueur atteint la cible lors du 2<sup>e</sup> tir »
- $A_3$  : « Le joueur atteint la cible lors du 3<sup>e</sup> tir ».

1. Recopier et compléter, avec les probabilités correspondantes sur chaque branche, l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à 0,4015.
3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire  $X$ , notée  $E(X)$ .
  - a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,1			0,0735

- b. Calculer  $E(X)$ .
- c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

### Partie B

On considère  $N$ , un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Un groupe de  $N$  personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes.

Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui compte parmi les  $N$  personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question,  $N = 15$ .
  - a. Justifier que  $Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
  - b. Donner la probabilité, arrondie à  $10^{-3}$ , qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.
2. Par la méthode de votre choix, que vous explicitez, déterminer le nombre minimum de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98.

### Exercice 2

5 points

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les points :

$$A(1; 1; -4), \quad B(2; -1; -3), \quad C(0; -1; -1) \quad \text{et} \quad \Omega(1; 1; 2).$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2.
  - a. Démontrer que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est normal au plan (ABC).
  - b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est  $x + y + z + 2 = 0$ .
3.
  - a. Justifier que le point  $\Omega$  n'appartient pas au plan (ABC).
  - b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan (ABC).

On admet que  $\Omega H = 2\sqrt{3}$ .

On définit la sphère  $S$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $2\sqrt{3}$  comme l'ensemble de tous les points  $M$  de l'espace tels que  $\Omega M = 2\sqrt{3}$ .

4. Justifier, sans calcul, que tout point  $N$  du plan  $(ABC)$ , distinct de  $H$ , n'appartient pas à la sphère  $S$ .

On dit qu'un plan  $\mathcal{P}$  est tangent à la sphère  $S$  en un point  $K$  lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $K \in \mathcal{P} \cap S$
- $(\Omega K) \perp \mathcal{P}$

5. Soit le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $x + y - z - 6 = 0$  et le point  $K$  de coordonnées  $K(3; 3; 0)$ .

Démontrer que le plan  $\mathcal{P}$  est tangent à la sphère  $S$  au point  $K$ .

6. On admet que les plans  $(ABC)$  et  $\mathcal{P}$  sont sécants selon une droite  $(\Delta)$ .

Déterminer une équation paramétrique de la droite  $(\Delta)$ .

### Exercice 3

5 points

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6.$$

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel.

Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de  $u_n$ .

```
def suite_u(n) :
    u = ...
    for i in range(1,n+1) :
        | u = ...
    return u
```

3.
  - a. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 2n$ .
  - b. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - c. Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier  $n_0$  tel que, pour tout entier naturel  $n$  vérifiant,  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 10^p$ ?
4. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
5. On considère la suite  $(v_n)$ , définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $v_n = u_n - 2n + 1$ .
  - a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L = []
    for i in range(n+1) :
        L.append(suite_u(i) - 2*i + 1)
    return L
```

La commande «*L.append*» permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste *L*.

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .

Démontrer cette conjecture.

**b.** En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , la forme explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

#### Exercice 4

5 points

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

#### Partie A

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.
  - a. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$ .
  - b. En déduire les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - c. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2; 5]$ .

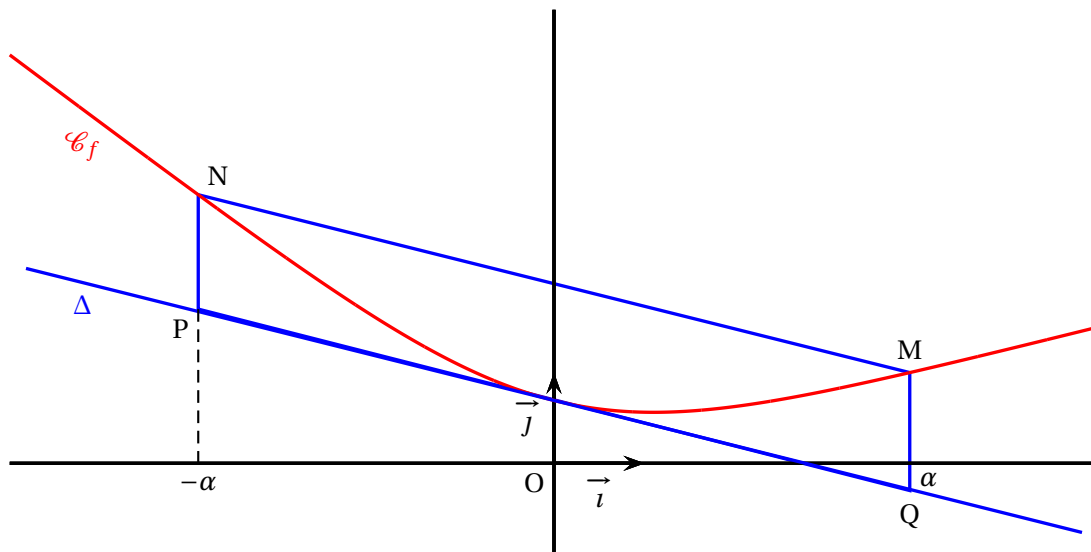
#### Partie B

On admettra que la fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

On note  $\Delta$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe  $\mathcal{C}_f$  la tangente  $\Delta$  et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisses respectives  $\alpha$  et  $-\alpha$ , et Q et P sont les deux points de la droite  $\Delta$  d'abscisses respectives  $\alpha$  et  $-\alpha$ .



1.
  - a. Justifier le signe de  $f''(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .
  - b. En déduire que la portion de la courbe  $\mathcal{C}_f$  sur l'intervalle  $[-\alpha ; \alpha]$ , est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.
2.
  - a. Montrer que  $f(-\alpha) = \ln(e^{-\alpha} + 1) + \frac{3}{4}\alpha$ .
  - b. Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.