n°4

3) $x \in [0;+\infty[$.

$$f(x) = x$$
$$f(x) - x = 0.$$
$$\frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x} = 0.$$

$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$.

$a = -1$, $b = 1$, $c = 1$

$$\iff -x^2 + x + 1 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1$$
$$\Delta = 5 > 0.$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{(-1-\sqrt{5})\times(-1)}{-2\times(-1)}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} < 0$$

Or $x_2 \notin [0;+\infty[$.

$f(x) = x$ admet pour solution unique sur $[0;+\infty[$: $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Partie B :

Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrons :

(P_n) : $1 \leq A_{n+1} \leq U_n$.

Initialisat° : $U_1 = \sqrt{U_0+1} = \sqrt{6} \geq 1$

On a bien $1 \leq U_1 \leq U_0$.

P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que (P_n) est vraie : $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$ et on veut démontrer que (P_{n+1}) est vraie :

$$1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}.$$

$U_{n+2} = f(U_{n+1})$, $f(U_{n+1})$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$1 \leq U_{n+1} \leq U_n.$$

On applique la fonction f strictement croissante sur $[0;+\infty[$:

$$1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}.$$

$$(P_n) \Rightarrow (P_{n+1}).$$

CCl : (P_n) est initialisée et héréditaire.

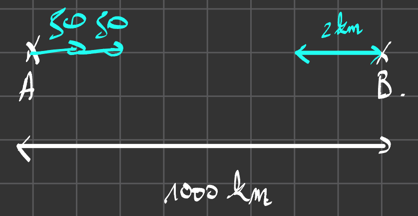
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$.

2) (U_n) est décroissante et minorée par 1 donc d'après le théorème de la convergence monotone (U_n) converge vers une valeur supérieure ou égale à 1.

3) * f est continue sur $[0;+\infty[$ car dérivable.

* (U_n) converge vers une limite appartenant à $[0;+\infty[$. D'après le théorème du point fixe, on a : ℓ est sol° de $f(\ell) = \ell$

$$\iff \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



Exercice 19 :

1) a) Vérifions que $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'éq° différentielle : $y' = ay$.

D'une part : $y' = f'(x)$
$= \boxed{a e^{ax}}$

D'autre part : $ay = a \times f(x) = \boxed{a \times e^{ax}}$

$f(x) = e^{ax}$ est bien solution de $y' = ay$.

b) Pour démontrer que $h(x)$ est une constante, dérivons h dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$h(x) = g(x)e^{-ax}.$$
$$h'(x) = g'(x) \times e^{-ax} - a e^{-ax} \times g(x).$$

Or g est solution $y' = ay$.
$$g'(x) = a \times g(x)$$

$$h'(x) = a \times g(x) \times e^{-ax} - a e^{-ax} \times g(x)$$
$$h'(x) = 0$$
$$\iff h(x) = C \in \mathbb{R}.$$

c. Ici, on déduit $g(x)$, or, on a :

$$h(x) = g(x) e^{-ax}.$$
$$g(x) = \frac{h(x)}{e^{-ax}} = C \times e^{ax}.$$

E : $y' = 2y + \cos(x)$.

$f_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

$f_0'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$.

$-a\sin(x) + b\cos(x) = 2 \times (a\cos(x) + b\sin(x)) + \cos(x)$.

$-a\sin(x) + b\cos(x) = 2a\cos(x) + 2b\sin(x) + \cos(x)$.

$-a\sin(x) + b\cos(x) = (2a+1)\cos(x) + 2b\sin(x)$.

$$\begin{cases} 2a+1 = b \\ -a = 2b. \\ a = -2b \end{cases} \iff \begin{cases} 2\times(-2b)+1 = b. \\ a = -2b. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -4b+1 = b. \\ a = -2b \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{5} \\ a = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

$$f_0(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x).$$

2) b) $y' = 2y$

$f(x) = C e^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$

f est sol° de (E) : $f' = 2f + \cos(x)$.

E_0 : $y' = 2y$.

$$f' - 2f = \cos(x).$$

$f - f_0$ est solution de E_0.

$$(f - f_0)' = 2 \times (f - f_0).$$
$$f' - f_0' = 2f - 2f_0.$$

$f' - (-a\sin(x) + b\cos(x)) = 2f - 2(a\cos(x) + b\sin(x))$

$f' + a\sin(x) - b\cos(x) = 2f - 2a\cos(x) - 2b\sin(x)$

$f' = 2f - 2a\cos(x) + b\cos(x) - 2b\sin(x) - a\sin(x)$.

$f' = 2f + \cos(x)(-2a+b) + \sin(x)(-2b-a)$