26/08/24.

Équation en $\sin(x) = a$.

1ère étape : si $a \notin [-1;1]$

L'équation $\sin(x) = a$ n'admet pas de solution.

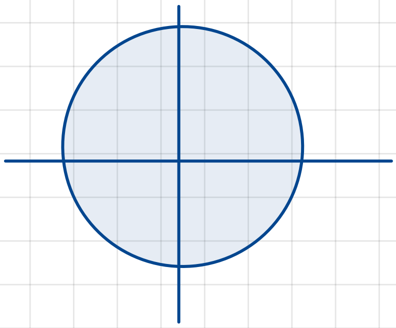
2ème si $a \in [-1;1]$, l'équation admet une infinité de solutions. Il faut trouver un angle α tel que

$$\sin(x) = a$$
$$\iff \sin(x) = \sin(\alpha).$$

$\frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\begin{cases} x = \alpha + k \times 2\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \alpha + k' \times 2\pi. & k' \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



$\cos(x) = \sin(x)$.

$\cos^2(x) = \sin^2(x)$.

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

$\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$

$\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 0$.

$\cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) = 0$.

$2\cos^2(x) = 1$.

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}$.

$\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\cos(x) = \cos(\alpha)$.

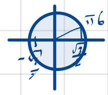
$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi & k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{\pi}{4} + k' \times 2\pi & k' \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Application : $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$3\cos^2(x) + 2\cos(x) - 5 = 0$



1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k' \times 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k' \times 2\pi. \end{cases}$$

$3\cos^2(x) + 2\cos(x) - 5 = 0$. On fait un changement de variable.

$X = \cos(x)$

$X^2 = \cos^2(x)$

$$3X^2 + 2X - 5 = 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5)$$
$$= 4 + 60 = 64 > 0$$

$$X_1 = \frac{-2-8}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} \qquad X_2 = \frac{-2+8}{6} = 1.$$

$\cos(x) = -\frac{5}{3}$

impossible, aucune solution.

$\cos(x) = 1$.

$\cos(x) = \cos(0)$.

$$\boxed{x = k \times 2\pi}$$

Démonstration par récurrence :

Introduction : Le but est de démontrer qu'une proposition notée (P_n) est vraie pour tout entier naturel $\mathbb{N}$.

Ω

I_0 ; I_1 ; I_2 ; I_3 ; .... ; I_k ; I_{k+1} ; ..... ; I_n.

Un jour un virus arrive et rend malade I_0 * Virus MP.

Puis en quelques semaines, on s'aperçoit que I_0 ; I_1 ; I_2 ; I_3 ; I_4 ; I_5 ; .... ; I_{10} sont malades. On pense que tout le monde est malade. Le but est donc de prouver que tout le monde est malade.

Si I_0 est malade. initialisation.

$\forall k \in \mathbb{N}$, I_k contamine I_{k+1}. hérédité

Tous les individus sont malades.

Initialisation.

$I_0 \quad 0 = \frac{0\times(0+1)}{2}$

$I_1 : 0+1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$I_2 : 0+1+2 = \frac{2\times(2+1)}{2}$

$I_3 : 0+1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$

$I_4 : 0+1+2+3+4 = \frac{4(4+1)}{2}$.

$I_5 : 0+1+2+3+4+5 = \frac{5(5+1)}{2}$.

$I_{50} : 0+1+2+\dots+50 = \frac{50\times(50+1)}{2}$

$I_k : 0+1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

$I_{k+1} : 0+1+\dots+k+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Hérédité :

On suppose que $\quad 0+1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

$0+1+2+\dots+k+k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)\times 2}{1\times 2}$

$0+\dots+k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$0+1+2+\dots+n = \frac{\overset{100}{n}\,(\overset{101}{n+1})}{2}$.

$\underline{0+\dots+100} = 5050$