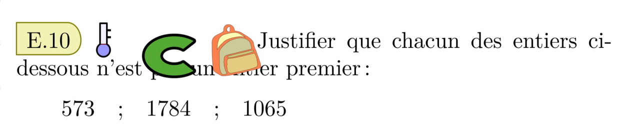
plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

Mercredi 18 septembre 2024.

Troisième : Mathématiques - Arithmétique


E.10 Justifier que chacun des entiers ci-dessous n’est p un tier premier :

573 ; 1784 ; 1065

- Liste des diviseurs de 573 : { 1 ; 3 ; . . . ; 573 }.
573 n'est pas premier car il a plus de deux diviseurs.

- Diviseurs de 1784 : { 1 ; 1784 ; 2 ; . . . }. De même 1784 n'est pas premier.

- 1065 : { 1 ; 1065 ; 5 ; 3 . . . }. 1065 n'est pas premier. (anglais : prime number).

Le PGCD de deux nombres.

↳ (acronyme) : Plus grand commun diviseur.

Définition : le PGCD de deux nombres entiers a et b se note : PGCD(a ; b).
il est égal au plus grand diviseur commun de a et b.

Ex : PGCD (12 ; 8) = ?

Décomposition de 12 : 12 = 2 x 2 x 3.
8 = 2 x 2 x 2.

PGCD(12 ; 8) = 4.

12 : { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; ; 12 }.
8 : { 1 ; 2 ; 4 ; 8 }
Diviseurs communs.
{ 1 ; 2 ; $\boxed{4}$ }

On peut aussi trouver le PGCD en faisant l'algorithme d'Euclide.

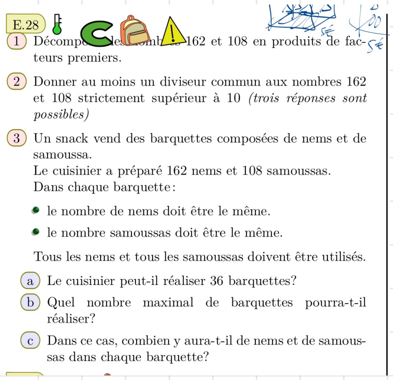
1) On divise le plus grand des 2 nombres par le plus petit.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ \hline -8 & 1 \\ \boxed{4} & \end{array}$$

2) On divise le diviseur par le reste :

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline -8 & 2 \\ 0 & \end{array}$$

3) On s'arrête dès qu'on trouve 0. Alors le PGCD(12 ; 8) est le dernier reste non nul.


E.28

① Décompo les nomb 162 et 108 en produits de facteurs premiers.

② Donner au moins un diviseur commun aux nombres 162 et 108 strictement supérieur à 10 *(trois réponses sont possibles)*

③ Un snack vend des barquettes composées de nems et de samoussa.
Le cuisinier a préparé 162 nems et 108 samoussas.
Dans chaque barquette :

- le nombre de nems doit être le même.
- le nombre samoussas doit être le même.

Tous les nems et tous les samoussas doivent être utilisés.

ⓐ Le cuisinier peut-il réaliser 36 barquettes?
ⓑ Quel nombre maximal de barquettes pourra-t-il réaliser?
ⓒ Dans ce cas, combien y aura-t-il de nems et de samoussas dans chaque barquette?

1)

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$162 = 2 \times 3^4$ $\qquad$ $108 = 2^2 \times 3^3$

2) Diviseurs commun :
3^4 et 3^3, 54

3) a) Le cuisinier ne peut pas faire 36 barquettes car 36 n'est pas un diviseur commun de 162 et 108.

b) Le nombre maximal de barquettes que pourra réaliser le cuisinier sera 54 car il s'agit du PGCD de 162 et 108

c)
$$\begin{array}{r|l} 162 & 54 \\ \hline -162 & 3 \\ 0 & \end{array}$$

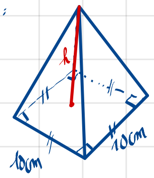
Il y aura 3 nems par paquets.

$$\begin{array}{r|l} 108 & 54 \\ \hline -108 & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Il y aura 2 samoussa par paquets.

Au secours ! Un DM de maths !

n°1 :

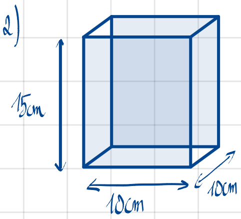


1) Volume d'un cône ou d'une pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de base} \times h.$$

$$V = \frac{1}{3} \times 10 \times 10 \times 15 = \boxed{500 \text{ cm}^3}$$

2)



$$V = L \times l \times h.$$
$$V = 10 \times 10 \times 15$$
$$V = \boxed{1500 \text{ cm}^3}.$$

n°2 : 1) Lorsqu'on additionne toutes les parts, on doit trouver : 1.

$$\frac{3}{16} + \frac{1^{\times 4}}{4_{\times 4}} + \frac{1^{\times 2}}{8_{\times 2}} + x = 1.$$

$$\frac{3}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + x = 1.$$

$$\frac{9}{16} + x = 1.$$

$$x = \frac{1^{\times 16}}{1_{\times 16}} - \frac{9}{16}$$

$$x = \frac{16}{16} - \frac{9}{16} = \boxed{\frac{7}{16}}$$

2) On transforme $\frac{7}{16}$ en pourcentage : $\frac{7}{16} \times 100 = 43{,}75\%$
La phrase est vraie car $43{,}75\% > 40\%$.

n°3.

	Billet de 50€	20€	10€
1€	51€	21 €	11 €
2€	52 €	22 €	12 €

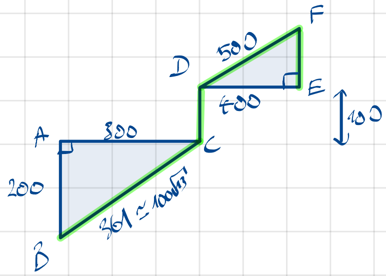
2) Sur 6 possibilités, il y a seulement 2 possibilités pour trouver un montant inférieur à 20 €.

$$p = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

3) Multiple de 3 : 51€ ; 21€ ; 12 €

Donc : $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Il est donc vrai que la probabilité d'obtenir un nombre multiple de 3 vaut $\frac{1}{2}$.

n°4 :



Calculons BC : ABC est un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$.

$BC^2 = 200^2 + 300^2$

$BC^2 = 40000 + 90000$.

$BC^2 = 130\,000$

$BC = \sqrt{130\,000} = 100\sqrt{13} \simeq 361\,m$.

Calculons FE, le triangle DEF est rectangle en E. D'après le théorème de Pythagore :

$FE^2 = DF^2 - DE^2$.

$FE^2 = 500^2 - 400^2$

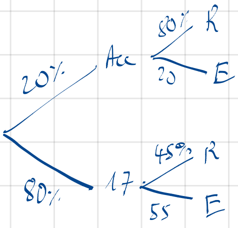
$FE^2 = 250\,000 - 160\,000$.

$FE^2 = 90\,000$

$FE = \sqrt{90\,000} = \boxed{300\,m.}$

Distance Parcourue : $100\sqrt{13} + 100 + 500 + 300$.

$\simeq 1261\,m$.



1) a) Au total, ils ont acheté 1440 dragées.

$$\begin{array}{r} 630 \\ +\ 810 \\ \hline 1440 \end{array}$$

b) $p = \frac{810}{1440}$ $\left(p = \frac{\text{nombres d'issues favorables.}}{\text{nombres d'issues total}} \right)$

$$p = \frac{81}{144} = \frac{\cancel{3} \times 27}{\cancel{3} \times 48} = \frac{27}{48} = \frac{\cancel{3} \times 9}{\cancel{3} \times 16} = \frac{9}{16}$$

2) Dragées blanches :

a)

$$\begin{array}{r|l} 810 & 21 \\ \hline -63 & 38 \\ 180 & \\ -168 & \\ \hline 012 & \end{array}$$

Ils ne peuvent pas réaliser 21 ballotins car il en resterait 12 chez les dragées blanches.

b) $630 = 2 \times 315$

$= 2 \times 3 \times 105$.

$= 2 \times 3 \times 5 \times 21$

$= 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7$.

$= 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$810 = 2 \times 405$

$= 2 \times 5 \times 81$

$= 2 \times 5 \times 3^4$

$= 2 \times 3^4 \times 5$.

$= 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

c) Le plus grand nombre qui divise 630 et 810 est :

$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 18 \times 5 = 90$

Ils pourront réaliser 90 ballotins dont la composition est :

$\frac{810}{90} = \frac{9 \times \cancel{9}}{\cancel{9}} = 9$ dragées blanches.

$\frac{630}{90} = \frac{\cancel{9} \times 7}{\cancel{9}} = 7$ dragées roses.

Chapitre 2 : le calcul numérique.

I- Les règles de calcul

1- Les nombres relatifs.

Pour additionner deux nombres relatifs :

- Les deux nombres ont le m̂ signe : on conserve le signe et on ajoute leur distance à 0.

Ex : $(+3) + (+4) = +7$.

$(-3) + (-4) = -7$.

- Les deux nombres ont des signes différents : le signe est le signe du nombre le plus loin de 0 et on calcule la différence des deux distances à 0 :

Ex : $(+3) + (-4) = -1$.

$(-3) + (+4) = +1$.

Pour soustraire deux nombres relatifs on additionne au 1er l'opposé du second.

Ex : $(+3) - (+4) = (+3) + (-4) = -1$.

Pour multiplier ou diviser deux nombres relatifs on applique les règles suivantes :

$\left.\begin{array}{l} (+) \times (+) = (+) \\ (-) \times (-) = (+) \end{array}\right\}$ signes identiques $(+)$

$\left.\begin{array}{l} (+) \times (-) = (-) \\ (-) \times (+) = (-) \end{array}\right\}$ signes différents $(-)$

$\frac{(+)}{(+)} = (+)$ $\frac{(-)}{(+)} = (-)$

$\frac{(-)}{(-)} = (+)$

$\left(\frac{\pm}{}\right) = (-)$

Ex :

$(-2) \times (-3) = (+6)$

$(-3) \times (+3) = (-9)$.

$(-2) \times (+3) = (-6)$.

II - Nombres en écriture fractionnaire.

Pour additionner deux nombres en écriture fractionnaire ou pour les soustraire, on doit les ramener au même dénominateur puis on calule les numérateurs tout en gardant les dénominateurs.

Ex : $\frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Ex : $\frac{4}{3} \times \frac{-1}{5} = \frac{-4}{15}$

Pour diviser deux fractions, on multiplie la $1^{ère}$ par l'inverse de la $2^{ème}$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Ex $\frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$.

Application : 1) $A = (-3) \times (-8) - 5$

$B = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

$C = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{4}$

$D = \frac{-\frac{4}{5} + \frac{8}{3}}{\frac{2}{3}}$

$A = (-3) \times (-8) - 5$

$A = 24 - 5$

$A = 19$

$B = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} - \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{2}{6} - \frac{3}{6}$

$= \frac{-1}{6}$

$D = \frac{-\frac{4}{5} + \frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{-4 \times 3}{5 \times 3} + \frac{8 \times 5}{3 \times 5}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{-12}{15} + \frac{40}{16}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{28}{15}}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{28}{15} \times \frac{3}{2} =$

$= \frac{14 \times \cancel{2}}{\cancel{3} \times 5} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{14}{5}}$

$C = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 3}}{4} = \frac{\frac{2}{6} + \frac{3}{6}}{4} = \frac{\frac{5}{6}}{4}$

$= \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{5 \times 1}{6 \times 4} = \boxed{\frac{5}{24}}$

II - Les puissances.

1 - Généralités.

Définitions : Soient a un nombre et n un entier positif.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Ex : $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

Troisième / Arithmétique

ChingEval : 6 exercices disponibles pour l'évaluation par QCM

1. *Division euclidienne*

E.1

① Complét[illegible]s p[illegible]ntillés ci-dessous en utilisant des entiers :

ⓐ $87 = \dots \times 4 + 7$ ⓑ $87 = \dots \times 4 + 3$

ⓒ $87 = \dots \times 4 - 1$ ⓓ $87 = 23 \times 4 + \dots$

② Parmi les égalités ci-dessous, laquelle représente la division euclidienne de 87 par 4?

E.2 Parmi les égalités suivantes, quelle égalité représen[illegible] d[illegible]sion euclidienne de 375 par 14?

ⓐ $375 = 25 \times 14 + 25$ ⓑ $375 = 26 \times 14 + 11$

ⓒ $375 = 27 \times 14 - 3$

E.3 Pour chaque question, déterminer l'égalité expr[illegible]nt [illegible]ivision euclidienne de a par b :

ⓐ $a = 29 \ ; b = 29$ ⓑ $a = 65 \ ; b = 120$

2. *Diviseurs d'un nombre*

E.4

① ⓐ Do[illegible] l[illegible]ix diviseurs du nombre 12.

ⓑ Donner tous les diviseurs du nombre 27.

② Quels sont les diviseurs communs aux entiers 12 et 27?

E.5

① Donner [illegible]h[illegible] diviseurs de l'entier 30 et les huit diviseurs de l'entier 24.

② Quels sont les diviseurs communs aux entiers 30 et 24?

E.6 Parmi les triplets de nombres ci-dessous lequell contien[illegible]rois diviseurs du nombre 144 :

ⓐ $(2\,;9\,;4)$ ⓑ $(2\,;3\,;7)$ ⓒ $(2\,;3\,;7)$

3. *Plus grand diviseur commun : liste des diviseurs*

E.7

Définition : soit a et b deux entiers, on appelle "**plus grand diviseur commun de** a **et de** b", noté *PGCD(a,b)*, le plus grand entier qui divise à la fois l'entier a et l'entier b.

Exemple : considérons $a=36$ et $b=60$.

- diviseurs de 36 : **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 9, **12**, 18, 36
- diviseurs de 60 : **1**, **2**, **3**, **4**, 5, **6**, 10, **12**, 15, 20, 30, 60

Les diviseurs communs de a et de b sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12

On en déduit : *PGCD(a,b)=12*

① Donner les 6 diviseurs de l'entier 12.

② Donner les 8 diviseurs de l'entier 42.

③ En déduire la valeur du "*plus grand diviseur commun*" des entiers 12 et 42.

E.8

① ⓐ [illegible]onn[illegible]es 6 diviseurs de 28.

ⓑ Donner les 6 diviseurs de 98.

② En déduire la valeur de $PGCD(28; 98)$.

E.9

① ⓐ Do[illegible] l[illegible] diviseurs de 54.

ⓑ Donner les 6 diviseurs de 243.

② En déduire la valeur de $PGCD(54; 243)$.

4. *Nombres premiers*

E.10 Justifier que chacun des entiers ci-dessous n'est [illegible] un [illegible] premier :

573 ; 1784 ; 1065

E.11 Indiquer en justifiant si l'affirmation [illegible] vraie [illegible] fausse.

Affirmation : "*Le nombre* 231 *est un nombre premier*"

E.12 *Dans cet exercice, une question est posée [illegible] seule [illegible] quatre réponses proposées est exacte. Indiquer la bonne réponse et justifier votre choix.*

Les nombres 23 et 37 :

(a) sont premiers

(b) sont divisibles par 3.

(c) n'ont aucun diviseur commun

(d) sont pairs.

E.13 *Dire si l'affirmation, en justifiant, est vraie [illegible] fausse.*

Affirmation : Pour tous les nombres entiers n compris entre 2 et 9, l'entier 2^n-1 est un nombre premier.

E.14

① Donner [illegible] d'entiers premiers dont la somme est un entier premier.

② On considère un couple $(a\,;b)$ d'entiers premiers tel que $a+b$ est un nombre premiers.
Etudier la parité des entiers a et b.

5. *Décomposition en produit de facteurs premiers*

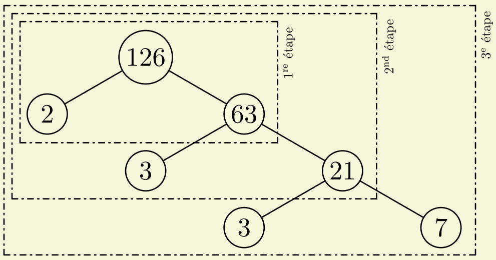
E.15 Le nombre 588 peut se décomposer sous la [illegible] :

$588=2^2\times3\times7^2$

Quels sont ses diviseurs premiers? C'est-à-dire les nombres qui sont à la fois des nombres premiers et des diviseurs de 588.

E.16

Exemple : pour déterminer la décomposition de l'entier 126 en produit de facteurs premiers, on utilise l'algorithme suivant qui est schématisé dans le diagramme ci-dessous :

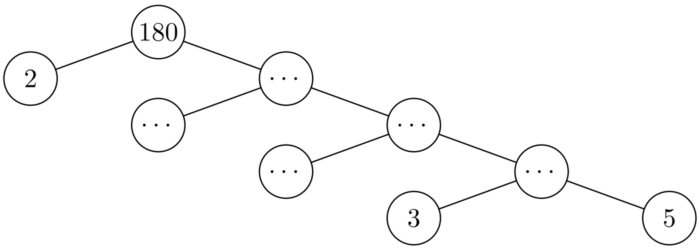


- On cherche un diviseur premier de 126 : par exemple 2.
  On obtient l'égalité : $126 = 2\times63$
- On cherche un diviseur premier de 63 : par exemple 3.
  On obtient l'égalité : $126 = 2\times3\times21$
- On cherche un diviseur premier de 21 : par exemple 3.
  On obtient l'égalité : $126 = 2\times3\times3\times7$
- On s'arrête puisque 7 est aussi un nombre premier.

Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers ci-dessous :

(a) 45 (b) 140 (c) 196

E.17 Compléter le diagramme ci-dessous afin d'obtenir [illegible] décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 180 :



E.18

① [illegible] la [illegible] en facteurs premiers de 27 000 000.

② Quels sont ses diviseurs premiers?

6. *Ensemble des diviseurs*

E.19 On considère l'entier A valant 60.

① Déterminer la valeur des entiers m, n, p positifs vérifiant l'égalité : $60=2^m\times3^n\times5^p$

② Parmi les nombres suivants, citer les diviseurs de A :
2 ; 2^2 ; 2^3 ; 3×5^2 ; $3^2\times5$

E.20

① [illegible] en produit de facteurs premiers de l'entier 30.

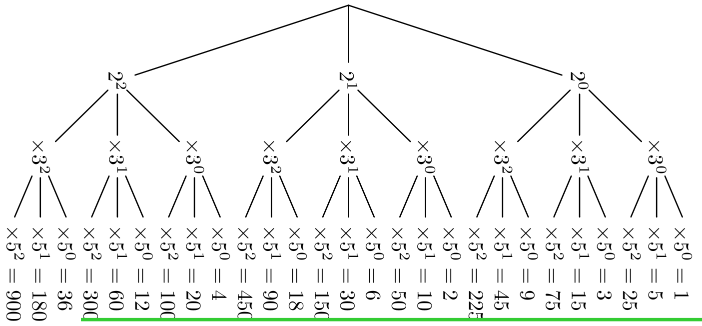
② En déduire la liste des huit diviseurs de l'entier 30.

E.21 Déterminer le plus petit nombre entier [illegible] admet trois diviseurs premiers différents. Expliquer votre raisonnement.

E.22

① Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 90.

② L'arbre ci-dessous représente tous les nombres s'écrivant sous la forme $2^i \times 3^j \times 5^k$ où les entiers i, j, k ont des valeurs allant de 0 à 2.



Donner l'ensemble des diviseurs du nombre 90.

Indication : on hachurera les parties de branches ne représentant pas des diviseurs de 180.

E.23

① Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 168.

② L'entier 168 possède 16 diviseurs. Donner en 6 sous la forme de produit de facteurs produits.

E.24

① Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier 448.

② L'entier 448 possède 14 diviseurs. Donner en 6 sous la forme de produit de facteurs produits.

7. *Plus grand diviseur commun : décomposition en produit de facteurs premiers*

E.25

Méthode : soit a et b deux entiers dont on connait la décomposition en produit de facteurs premiers.
La décomposition en produit de facteurs premiers de $PGCD(a{,}b)$ vérifie :

- ses facteurs sont les facteurs communs à chacune des décompositions de a et de b.
- l'exposant de chacun de ses facteurs est le plus petit exposant de ce facteur rencontré dans les décompositions de a et de b.

Exemple : pour $a = 36$ et $b = 60$, on a :
$a = 2^2 \times 3^3$; $b = 2^2 \times 3 \times 5$

Ainsi, la décomposition de $PGCD(32{,}60)$ vérifie :

- ses facteurs sont 2 et 3.
- L'exposant du facteur 2 est 2 ; l'exposant du facteur 3 est 1.

On en déduit la valeur de :
$PGCD(32{,}60) = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$

① ⓐ Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 126.

ⓑ Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 108.

② En déduire la valeur $PGCD(126{,}108)$.

E.26

① Déterminer les décompositions en produit de facteurs premiers des entiers 756 et 792.

② En déduire le PGCD des entiers 756 et 792.

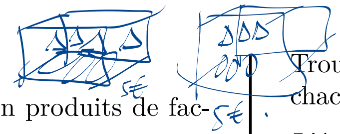
8. *Utilisation du plus grand diviseur commun*

E.27 Un professeur organise une sortie pédagogique au Futuroscope pour ses élèves de troisième. Il veut répartir les 126 garçons et les 90 filles par groupes. Il souhaite que chaque groupe comporte le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

① Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 126 et 90.

② Trouver tous les entiers qui divisent à la fois les nombres 126 et 90.

③ En déduire le plus grand nombre de groupes que le professeur pourra constituer.
Combien de filles et de garçons y aura-t-il alors dans chaque groupe?



E.28

① Décomposer les nombres 162 et 108 en produits de facteurs premiers.

② Donner au moins un diviseur commun aux nombres 162 et 108 strictement supérieur à 10 *(trois réponses sont possibles)*

③ Un snack vend des barquettes composées de nems et de samoussa.
Le cuisinier a préparé 162 nems et 108 samoussas.
Dans chaque barquette :

- le nombre de nems doit être le même.
- le nombre samoussas doit être le même.

Tous les nems et tous les samoussas doivent être utilisés.

(a) Le cuisinier peut-il réaliser 36 barquettes?

(b) Quel nombre maximal de barquettes pourra-t-il réaliser?

(c) Dans ce cas, combien y aura-t-il de nems et de samoussas dans chaque barquette?

E.29 Deux fleuristes possèdent le même stock : 300 iris et [illegible] roses. Chacun d'eux souhaitent utiliser toutes ces fleurs mais ont leur idée sur l'utilisation de ces fleurs :

- Le fleuriste A souhaite faire des bouquets d'iris et des bouquets de roses comportant chacun le même nombre de fleurs. Il souhaite de plus que ces bouquets est le maximum de fleurs possibles.
- Le fleuriste B souhaite faire le maximum de bouquets tous identiques où chaque bouquet contient des iris et des roses.

① Déterminer le nombre de bouquets d'iris et le nombre de bouquets de roses réalisés par le fleuriste A.

② Déterminer le nombre de bouquets de fleurs *(et leur composition)* réalisés par le fleuriste B.

E.30 Un vendeur possède un stock de 252 flacons de parfum au tiaré et de 315 savonnettes au monoï.

Il veut écouler tout ce stock en confectionnant le plus grand nombre de coffrets "*Souvenirs de Polynésie*" de sorte que :

- le nombre de flacons de parfum au tiaré soit le même dans chaque coffret ;
- le nombre de savonnettes au monoï soit le même dans chaque coffret ;
- tous les flacons et savonnettes soient utilisés.

Trouver le nombre de coffrets à préparer et la composition de chacun d'eux.

L'évaluation de cette question tiendra compte des observations et étapes de recherche, même incomplètes ; les faire apparaître sur la copie.

E.31 La présidente du club veut offrir des petits sachets cadeaux tous identiques contenant des autocollants et des drapeaux avec le logo du club. Elle a acheté 330 autocollants et 132 drapeaux et veut tous les utiliser. Elle veut que, dans chaque sachet, il y ait exactement le même nombre d'autocollants et que, dans chaque sachet, il y ait exactement le même nombre de drapeaux.

① Pourquoi n'est-il pas possible de faire 15 sachets?

② (a) Décomposer 330 et 132 en produit de facteurs premiers.

(b) En déduire le plus grand nombre de sachets que la présidente pourra réaliser.

(c) Dans ce cas, combien mettra-t-elle d'autocollants et de drapeaux dans chaque sachet?

E.32

① Anne et Jean ont acheté 630 dragées roses et 810 dragées blanches qu'ils ont mises dans un sachet. On suppose que les dragées sont indiscernables au toucher.

(a) Combien Anne et Jean ont-ils acheté de dragées au total?

(b) Anne prend au hasard une dragée dans le sachet. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne une dragée blanche?

② Avec ces dragées, ils réalisent des ballotins pour leur mariage de sorte que :

- le nombre de dragées roses est le même dans chaque ballotin ;
- le nombre de dragées blanches est le même dans chaque ballotin ;
- toutes les dragées soient utilisées.

(a) Peuvent-ils réaliser 21 ballotins?

(b) Décomposer 630 et 810 en produit de facteurs premiers.

(c) En déduire le nombre maximum de ballotins qu'Anne et Jean pourront réaliser.
Donner alors la composition de chaque ballotin.

9. *Simplification de fractions*

E.33 Pour chacune des fractions ci-dessous, donner leur expression irréductible :

(a) $\dfrac{2^4\times3^8\times7^3}{2^7\times3^6\times7^2}$ (b) $\dfrac{2^{12}\times3^4\times5^5}{2^8\times3^4\times5^7}$ (c) $\dfrac{2^{34}\times5^{17}}{2^{30}\times3^3\times5^{15}}$

E.34

① (a) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers 12, 44 et 72.

(b) En déduire l'expression irréductible de la fraction $\dfrac{12\times44}{72}$.

② Pour chacune des fractions suivantes, donner leur expression irréductible :

(a) (b) (c)

10. *Nombres premiers entre eux*

E.35

Définition : soit a et b deux entiers non-nuls. On dit que les entiers a et b sont premiers entre eux si l'entier 1 est le seul diviseur commun à a et b.

Remarque : comme définition équivalente, nous avons la proposition :

Deux entiers a et b sont premiers
si, et seulement si, $PGCD(a,b)=1$.

Proposition : soit a et b deux entiers non-nuls. Si les entiers a et b n'admettent aucun entier premier comme diviseur commun alors les entiers a et b sont premiers entre eux.

Exemple : considérons : $a=24$; $b=35$
On a les décompositions en produit d'entiers premiers :
$a=2^3\times3$; $b=5\times7$
Les entiers a et b n'admettent aucun entier premier comme diviseur commun. On en déduit que les entiers 24 et 35 sont premiers entre eux.

Parmi les couples d'entiers ci-dessous, lesquels forment un couple d'entiers premiers entre eux :

ⓐ (32 ; 81) ⓑ (28 ; 21) ⓒ (17 ; 36)

E.36 Quel est le nombre réalisant les trois conditions suivantes :

- Je suis un nombre s'écrivant $15x$ où x est un chiffre compris entre 0 et 9.
- Je suis premier avec l'entier 126.
- Je ne suis pas un entier premier.

Indication : voici les entiers premiers inférieurs à 200 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97 ; 101 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 127 ; 131 ; 137 ; 139 ; 149 ; 151 ; 157 ; 163 ; 167 ; 173 ; 179 ; 181 ; 191 ; 193 ; 197 ; 199

11. *Fractions irréductibles*

E.37

Définition : soit a et b deux entiers où $b\neq0$. La fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** si les entiers a et b sont premiers entre eux.

Parmi les fractions ci-dessous, lesquelles sont données sous leur forme irréductible :

ⓐ $\frac{15}{27}$ ⓑ $\frac{14}{27}$ ⓒ $\frac{36}{15}$ ⓓ $\frac{49}{64}$

E.38

Donnée utile. Le début de la liste ordonnée des nombres premiers est :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

① Décomposer 140 et 870 en produit de nombres premiers.

② En déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{140}{870}$.

E.39 *Pour la question posée, une seule des trois réponses proposées est exacte. Préciser laquelle et justifier votre choix.*

La forme irréductible de la fraction $\frac{882}{1\,134}$ est :

ⓐ $\frac{14}{9}$ ⓑ $\frac{63}{81}$ ⓒ $\frac{7}{9}$

E.40

① ⓐ Donner la liste des diviseurs des huit diviseurs de l'entier 30 et des huit diviseurs de l'entier 24.

ⓑ Quels sont les diviseurs communs aux entiers 30 et 24?

② Écrire la fraction $\frac{30}{24}$ sous la forme d'une fraction irréductible

③ Effectuer le calcul suivant : $\frac{30}{24}-\frac{3}{4}$

E.41

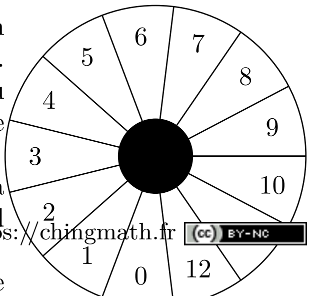
① Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants : 18 ; 30 ; 45

② En utilisant la question précédente, simplifier les fractions suivantes : :

ⓐ $\frac{30}{45}$ ⓑ $\frac{18}{30}$ ⓒ $\frac{18}{45}$

12. *Nombres premiers et probabilités*

E.42



On considère un jeu composé d'un plateau tournant et d'une boule. Représenté ci-contre, ce plateau comporte 13 cases numérotées de 0 à 12.
On lance la boule sur le plateau, la boule finit par s'arrêter au hasard sur une case numérotée.
La boule a la même probabilité de

① Quelle est la probabilité que la boule s'arrête sur la case numérotée 8?

② Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur laquelle la boule s'arrête soit un nombre impair?

③ Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur laquelle la boule s'arrête soit un nombre premier?

E.43 Un sac contient 20 boules ayant chacune la même probabilité d'être tirée. Ces 20 boules sont numérotées de 1 à 20. On tire une boule au hasard dans le sac.

Tous résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

① Quelle est la probabilité de tirer la boule numérotée 13?

② Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un numéro pair?

③ A-t-on plus de chances d'obtenir une boule portant un numéro multiple de 4 que d'obtenir une boule portant un numéro diviseur de 4?

④ Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un numéro qui soit un nombre premier?

13. *Plus petit multiple commun*

E.44 ***L'exercice n'existe pas.***

E.45

Définition : soit a et b deux entiers, on appelle **plus petit commun multiple**, noté $PPCM(a{,}b)$, le plus petit des entiers qui est à la fois un multiple de a et un multiple de b.

Exemple : pour $a=12$ et $b=15$.

- multiples de 12 : 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**...
- multiples de 15 : 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**, 135, 150...

La valeur de $PPCM(12{,}15)$ est 60.

① ⓐ Donner les dix multiples du nombre 16.

ⓑ Donner les dix multiples du nombre 12.

② En déduire la valeur de $PPCM(12{,}16)$.

E.46

Méthode : soit a et b deux entiers dont on connait la décomposition en produit de facteurs premiers.

La décomposition de $PPCM(a{,}b)$ possède les caractéristiques suivantes :

- l'ensemble des facteurs contenus dans les décompositions de a et de b
- les exposants de chacun de ces facteurs est l'exposant maximal rencontré dans les décompositions de a et de b.

Exemple : pour $12 = 2^2{\times}3$ et $15 = 3{\times}5$.

- le $PPCM(a{,}b)$ a pour facteur 2, 3 et 5.
- le $PPCM(a{,}b)$ récupère les exposants les plus grands de la décomposition de 12 et 15

On a : $PPCM(12{,}15) = 2^2{\times}3^1{\times}5^1 = 4{\times}3{\times}5 = 60$.

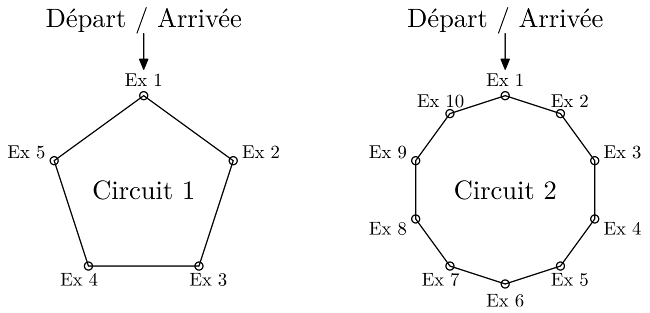
① Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 20 et de 75.

② En déduire la valeur de $PPCM(20{,}75)$.

14. *Utilisation du plus petit multiple commun*

E.47 Un entraîneur de sport prépare deux circuits d'entraînement contenant plusieurs exercices de cardio et de renforcement musculaire :

- un circuit commence à l'exercice 1 et se termine en revenant à l'exercice 1 ;
- le cricuit 1 contient cinq exercices. Chaque exercice dure 40 secondes et doit être suivi de 16 secondes de repos permettant de se rendre à l'exercice suivant ;
- le circuit 2 contient dix exercices. Chaque exercice dure 30 secondes et doit être suivi de 5 secondes de repos permettant de se rendre à l'exercice suivant.



① Montrer que le circuit 1 s'effectue en 280 secondes et que le circuit 2 s'effectue en 350 secondes.

② Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 280 et 350.

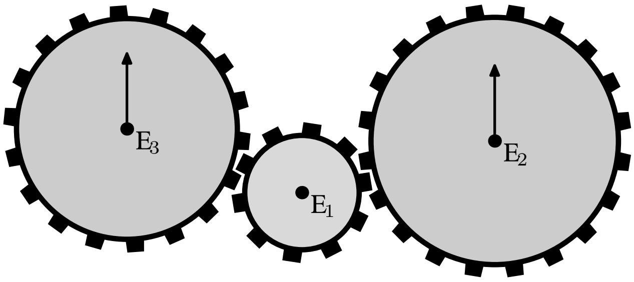
③ Une séance d'entraînement est constituée de plusieurs tours du même circuit.

Au coup de sifflet de l'entraîneur, Camille commence une séance d'entraînement sur le circuit 1 et Dominique sur le circuit 2.

(a) Expliquer pourquoi, lorsque 2800 secondes se sont écoulées à partir du coup de sifflet, Camille se trouve de nouveau au départ du circuit 1.
Préciser où se trouve Dominique sur le circuit 2 lorsque 2800 secondes se sont écoulées.

(b) Après le coup de sifflet, combien de temps faut-il à Camille et Dominique pour se retrouver en même temps pour la première fois au départ de leur circuit? Exprimer cette durée en minute et en seconde?

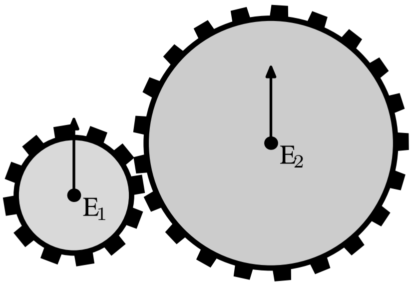
E.48 On considère les engrenages $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ composées respectivements de 18, 10 et 20 dents.



Au départ, les flèchent indiquées sur les engrenages $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ sont orientés vers le haut. Dès qu'on commence à tourner l'engrenage $\mathcal{E}_1$, les flèchent ne sont plus orientées vers la même direction.

Combien de tours complets de l'engrenage $\mathcal{E}_1$ doit-on au minimum réaliser pour que les deux flèches se retrouvent orienter vers le haut?

E.49 On considère les engrenages $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ composées respectivements de 12 et 21.



Au départ, les flèchent indiquées sur les engrenages $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont orientés vers le haut. Dès qu'on commence à tourner l'engrenage $\mathcal{E}_1$, les flèchent ne sont plus orientées vers la même direction.

Combien de tours complets de l'engrenage $\mathcal{E}_1$ doit-on au minimum réaliser pour que les deux flèches se retrouvent orienter vers le haut?

E.50 Deux coureurs A et B partent en même temps sur une piste d'athlétisme. Les deux courent à vitesse constante. Le coureur effectue un tour en $56\,s$ alors que le coureur B effectue le tour en $96\,s$.

Combien de temps va s'écouler pour qu'il se retrouve en même temps sur la ligne de départ?

15. *Approfondissement : un peu d'arithmétique*

E.51

① (a) Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2 744.

(b) En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $2\,744^2$.

(c) À l'aide de cette décomposition, trouver x tel que: $x^3 = 2\,744^2$

② Soient a et b deux nombres entiers supérieurs à 2 tels que $a^3 = b^2$.

(a) Calculer b lorsque $a = 100$.

(b) Déterminer deux nombres entiers a et b supérieurs à 2 et inférieurs à 10 qui vérifient l'égalité $a^3 = b^2$.

E.52 La somme de deux multiples de 5 est toujours un multiple de 5.