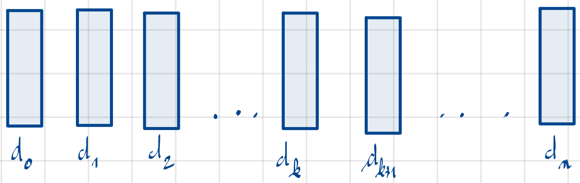
Mercredi 4 septembre 2024.

Spé maths - TG.

I - Le raisonnement par récurrence.

1- L'effet domino.



Pour démontrer que tous les dominos tombent, on peut :

1) démontrer que le premier domino d_0 tombe.
2) démontrer que le domino k fait tomber le domino $k+1$.
3) Tous les dominos tombent.

2) Transcription mathématique du raisonnement par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose (P_n) une proposition. Pour démontrer la proposition (P_n) par récurrence, on doit :

Initialisation : Vérifier que P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que (P_n) est vraie et on démontre que (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : (P_n) : $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Démontrons (P_n) par récurrence.

Initialisation : Au rang $n = 0$ D'une part le membre de gauche vaut 0.

Celui de droite : $\frac{0\times(0+1)}{2} = 0$.

P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que :

Hypothèse de récurrence : $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Démontrons que $1+2+\dots+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+2+\dots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)\times 2}{1\times 2}$$

$$1+2+\dots+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

CCl : P_0 est vraie.
$(P_n) \Rightarrow P_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Application : Soit $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n+1. \\ u_0 = 0. \end{cases}$

1) Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.
2) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n : P_n
3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

$$u_{0+1} = u_0 + 2\times 0 + 1$$
$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + 2\times 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$u_3 = u_2 + 2\times 2 + 1 = 4 + 4 + 1$$
$$u_3 = 9$$

$$u_4 = u_3 + 2\times 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$$

2) Nous pouvons conjecturer que :
P_n : $\forall \in \mathbb{N}$, $U_n = n^2$

3) Initialisation : D'une part $u_0 = 0$, d'autre part $0^2 = 0$. P_0 est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n = n^2$

On veut prouver que $u_{n+1} = (n+1)^2$

Par définition $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1$$
$$u_{n+1} = (n+1)^2$$

CCl : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = n^2$

Application

Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer par récurrence la proposition (P_n) :

3 divise $4^n + 5$.

$$\iff \boxed{\exists k \in \mathbb{N}, \quad 4^n + 5 = 3k.}$$

Initialisation : Soit $n = 0$ $\quad 4^0 + 5 = 6$; Pour $k = 2$, $3 \times 2 = 6$. $\}$ P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad 4^n + 5 = 3k$.

M.q $\quad 4^{n+1} + 5 = 3K \quad K \in \mathbb{N}$.

HR : $\quad 4^n + 5 = 3k. \quad) \times 4.$

$4^{n+1} + 20 = 3k \times 4.$

$4^{n+1} + \underbrace{5 + 15} = 3k \times 4.$

$4^{n+1} + 5 = 3k \times 4 - 15.$

$4^{n+1} + 5 = 3 \times k \times 4 - 3 \times 5$

$4^{n+1} + 5 = 3(4k - 5)$

$4^{n+1} + 5 = 3K$

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est multiple de 3.

11/09/24 : Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrez que :

(P_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, 9 divise $4^n + 15n - 1$.

$\iff \exists q \in \mathbb{N}$ t.q $4^n + 15n - 1 = 9q$.

Initialisation : Soit $n = 0$, $\quad 4^0 + 15 \times 0 - 1 = 0 = 9 \times 0$

donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que

HR : $\quad 4^n + 15n - 1 = 9q.$

Objectif : $\boxed{4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9Q}$

$\iff 4^{n+1} + 15n + 14 = 9Q.$

HR : $\quad 4^n + 15n - 1 = 9q \quad) \times 4$

$\iff 4^{n+1} + 60n - 4 = 9q \times 4$

$\iff 4^{n+1} + 15n + 14 + 45n - 18 = 9q \times 4.$

$\iff 4^{n+1} + 15n + 14 = 9q \times 4 - 45n + 18.$

$\iff 4^{n+1} + 15n + 14 = \underbrace{9(4q - 5n + 2)}$

$\iff 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9 \times Q$

Ccl : P_0 est vraie et $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 15n - 1$ est multiple de 9.

II - Limites de suite :

1) Rappel :

Une suite est la transformation d'un entier naturel n en un unique réel noté U_n.

$$\mathbb{N} \qquad \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U_n$$

indice $\qquad$ terme

Ex : $\quad U_n = 2n.$

n	0	1	2	3	4	5	6.
U_n	0	2	4	6	8	10	12

2) limite

La limite d'une suite correspond au comportement de U_n lorsque n devient grand.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty. \\ -\infty \\ \ell \in \mathbb{R} \\ \text{pas de limite.} \end{cases}$$

3) Limite infinie.

On dit qu'une suite (U_n) tend vers $+\infty$, c-à-d :

$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty.$

$\iff \boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q } \forall n \geq n_0, \ U_n > A}$

De même $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty.$

$\iff \boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ U_n < A.}$

4) Limite finie.

On dit que (U_n) admet une limite finie, c-à-d :

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R}$

$\iff \boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ t.q } \forall n \geq n_0, \ |U_n - \ell| < \varepsilon.}$

5) A connaître. $\quad k \in \mathbb{N}^*$

limites infinies :

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \to +\infty} n^k = +\infty.$$

limites finies. $\quad k \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

6) Limites par comparaison et encadrement

a) Théorème de comparaison.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} U_n \leq V_n. \\ \lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l} U_n \leq V_n \\ \lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty.$$

b) Théorème des gendarmes : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = l.$$

Application. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad -1 \leq \sin(n) \leq 1.$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}. \qquad \times \frac{1}{n} \quad n > 0.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

7) Opération sur les limites.

a) Somme de limites.

u_n	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
v_n	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$u_n + v_n$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Ex : $u_n = n^2 - n = n^2 \times \left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = n^2 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$