plus de bonnes notes
le soutien scolaire connecté

Chapitre n°2 : Limites de fonctions et continuité

I- Limite finie lorsque $x \to \pm\infty$

1) Définition

On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0 \; |f(x) - l| < \varepsilon$.

Dans ce cas on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}_f$.

De manière analogue, on définit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

2- Limite infinie lorsque $x \to \pm\infty$

On dit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\iff$

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, \; f(x) \geq A$.

On peut avoir de façon analogue : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

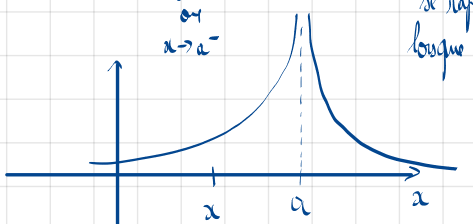
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty \iff n$ pair

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty \iff n$ est impaire.

II- Limite lorsque $x \to a \in \mathbb{R}$

1- Limite infinie lorsque $x \to a \in \mathbb{R}$

On dit que $\lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ \text{ou} \\ x \to a^-}} f(x) = \pm\infty$ si et seulement si $f(x)$ se rapproche de $\pm\infty$ lorsque $x \to a^+$ ou $x \to a^-$



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Dans ce cas on dira que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Application : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+$

Par quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$.

2 Limite finie en une valeur x finie.

On dit que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 2 = 6$.

$\iff$ que $f(x)$ se rapproche aussi près que l'on veut de l lorsque x se rapproche suffisamment près de a.

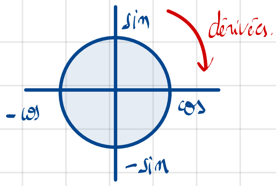
Ex : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(0+x) - \sin(0)}{x}$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$= f'(a)$

$= \sin'(0) = \cos(0) = 1$.



$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{0+x} - e^0}{x}$

$= \exp'(0)$

$= \exp(0) = 1$.

III- Limites de fonctions composées.

Soient f et g deux fonctions et a, b, c, des réels ou $\pm\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c \end{array}\right\} \lim_{x \to a} f(g(x)) = c.$$

Exemple : $f(x) = 2x + 3$ $g(x) = x^2$.

$f(g(x)) = ?$

$f(2) = 2 \times 2 + 3$

$f(p) = 2 \times p + 3$

$f(g(x)) = 2 \times g(x) + 3$

$= 2 \times x^2 + 3$

$g(f(x)) = (2x+3)^2$

$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1 \end{array}\right\} \text{Par composition de limite, on a : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Application : $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ car la racine d'un nombre est toujours positive

par quotient $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x}$.

$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty. \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{array}\right\}$ Par composition de limites, on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

$\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2-3x-9}{x-3}$

3 est racine de $2x^2-3x-9$. $2x^2-3x-9$ est factorisable par $(x-3)$.

$\displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{\cancel{(x-3)}(2x+3)}{\cancel{x-3}} = 9$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x-9 & x-3 \\ \cline{2-2} -(2x^2-6x) & 2x+3 \\ \hline 0 \quad 3x-9 & \\ -(3x-9) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\frac{0}{0}$: factorise $(x-3)$; taux d'accroissement