

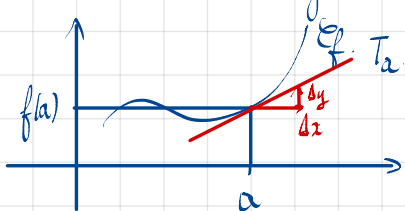
I - Rappels dérivabilité

1- Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a .
On dit que f est dérivable en a ssi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l \in \mathbb{R}.$$

Alors on note $l = f'(a)$. Géométriquement $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) ?$$

2- Equation de la tangente

$$T_a: y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

3- Lien entre variation et fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si $f' = 0$, alors f est constante.

Si $f' > 0$, alors f est croissante strictement.

Si $f' < 0$, alors f est décroissante.

II - Dérivées des fonctions usuelles

fonctions Df dérivées Df'

$f(x) = c \quad \mathbb{R} \quad f'(x) = 0 \quad Df' = \mathbb{R}$

$f(x) = ax + b \quad \mathbb{R} \quad f'(x) = a \quad Df' = \mathbb{R}$

$f(x) = x^n \quad \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1} \quad Df' = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad Df' = \mathbb{R}^*$

fonctions Df dérivées Df'
 $f(x) = \sqrt{x} \quad]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad]0; +\infty[$

$f(x) = \cos(x) \quad \mathbb{R} \quad f'(x) = -\sin(x) \quad \mathbb{R}$
 $f(x) = \sin(x) \quad \mathbb{R} \quad f'(x) = \cos(x) \quad \mathbb{R}$

$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \} \quad f'(x) = ?$

$f(x) = e^x \quad \mathbb{R} \quad f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln(x) \quad]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad]0; +\infty[$

Opération sur les dérivées

fonctions dérivées
 $f(x) = k u(x) \quad f'(x) = k u'(x)$
 $f(x) = u(x) + v(x) \quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$

$f(x) = u(x) \times v(x) \quad f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

$f(x) = (u(x))^m \quad f'(x) = m \times u'(x) \times (u(x))^{m-1}$

$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$f(x) = \frac{1}{u(x)} \quad f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$

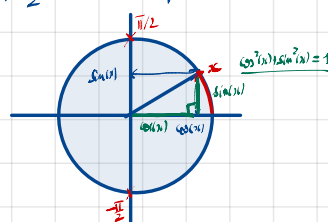
$f(x) = e^{u(x)} \quad f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

Application: Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On pose

$f(x) = \tan(x)$

$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Etudier les variations de f
sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$



$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad u(x) = \sin(x) \quad v(x) = \cos(x)$
 $u'(x) = \cos(x) \quad v'(x) = -\sin(x)$

$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
 $= \frac{\cos(x) \times \cos(x) - (-\sin(x)) \times \sin(x)}{(\cos(x))^2}$

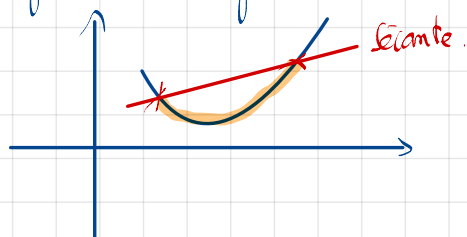
$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

$f'(x) > 0$, f est croissante.

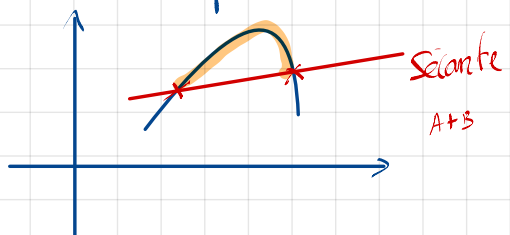
III - Convexité.

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$.

On dit que f est convexe si f est en-dessous de ses sécantes.



On dit que f est concave si f est au-dessus de ses sécantes.



Dans la pratique, pour étudier la convexité d'une fonction, on la dérive deux fois:

$$f \longrightarrow f' \longrightarrow f'' \quad (f \text{ seconde})$$

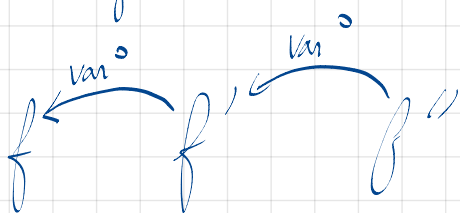
Si $f'' > 0$ alors f est convexe.

Si $f'' < 0$ alors f est concave.

Si f'' s'annule en changeant de signe, alors f admet un point d'inflexion.

Conséquence: Si f est convexe, f est au-dessus de ses tangentes.

Si f est concave, f est en-dessous de ses tangentes.



$$n^o 12: f(x) = (x^2 + 2)e^x$$

$$u(x) = x^2 + 2 \quad v(x) = e^x$$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \quad u'(x) = 2x \quad v'(x) = e^x$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$f'(x) = 2x \times e^x + e^x \times (x^2 + 2)$$

$$f'(x) = e^x (x^2 + 2x + 2)$$

f' est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} :

$$f''(x) = u'(x)v'(x) + v''(x)u(x) \quad \text{ou} \quad u'(x) = e^x$$

$$u''(x) = e^x$$

$$v'(x) = x^2 + 2x + 2$$

$$v''(x) = 2x + 2$$

$$f''(x) = u'(x)v''(x) + v'''(x)u(x)$$

$$f''(x) = e^x \times (x^2 + 2x + 2) + (2x + 2) \times e^x$$

$$f''(x) = e^x (x^2 + 2x + 2 + 2x + 2)$$

$$f''(x) = e^x (x^2 + 4x + 4)$$

2) Pour étudier la convexité de f , on doit étudier le signe de $f''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc le signe de $f''(x)$ ne dépend que de $(x^2 + 4x + 4)$.

$x^2 + 4x + 4$ est une expression de second degré dont le discriminant est:

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0, \quad x^2 + 4x + 4 \text{ s'annule}$$

$$\text{une seule fois pour } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2.$$

x	$- \infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
f	Convexe		Convexe.

Pas de point d'inflexion car f'' ne change pas de signe lorsqu'elle s'annule.

1. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^{1000} + x$.

On peut affirmer que :

- la fonction g est concave sur \mathbb{R} .
- la fonction g est convexe sur \mathbb{R} .
- la fonction g possède exactement un point d'inflexion.
- la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

$x \in \mathbb{R}$ g est dérivable sur \mathbb{R} comme une fonction polynôme.

$$g'(x) = 1000x^{999} + 1$$

$$g''(x) = 999000x^{998} \geq 0$$

$f(x) = (\dots)$? signe.

$ax+b \rightarrow$ résoudre une équation.
 $ax^2+bx+c \rightarrow \Delta$ discriminant.
 $e^x \rightarrow \oplus$

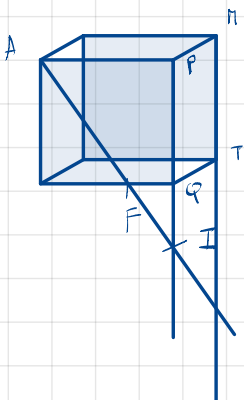
$\oplus \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 2x \geq -3 \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$

$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

$x \mid -\infty \quad -\frac{3}{2} \quad 1 \quad +\infty$
 $\frac{-}{-} \quad \frac{+}{-} \quad \frac{+}{+}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$2x+3$	$-$	\emptyset	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	\emptyset	$+$
	$+$	\emptyset	$-$	$+$

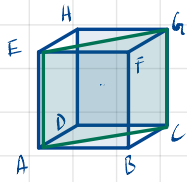
ax^2+bx+c
 $x_1 \quad x_2 \quad +\infty$
 signe de a | signe de $-a$ | signe de a



I - Géométrie euclidienne.

1- le plan

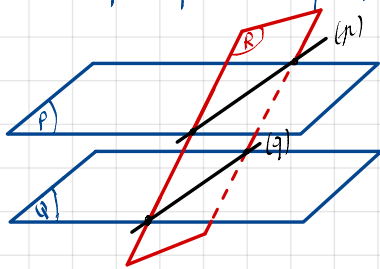
Définition: Par 3 points non-alignés passe un unique plan (P)
 $\hookrightarrow A, B, C$ alors $(P) = (ABC)$.



(EFG) est un plan.
 Remarque: deux droites sécantes ou parallèles définissent également un plan.

2) Parallélisme de deux plans.

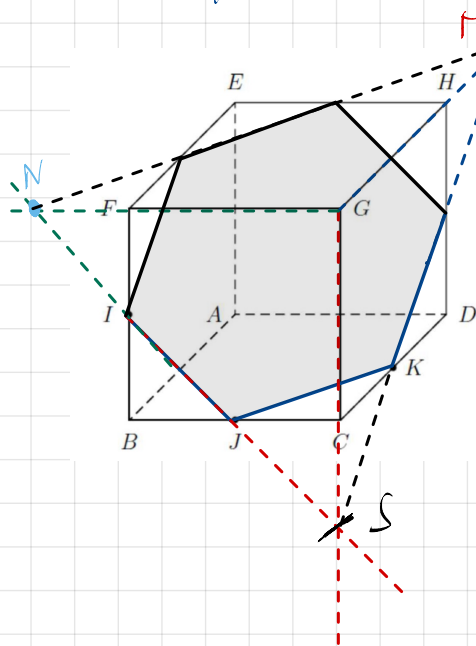
Un plan R coupe un plan P et un plan Q parallèles.



alors (r) et (q) sont des droites parallèles.

3) Section d'un cube par un plan.

Soit un cube ABCDEFGH. Soit un plan (P) qui passe par au moins 1 point du cube. La section du cube par le plan (P) est le polygone représentant l'intersection des faces du cube avec le plan P.



Méthode: Pour tracer la section du cube par le plan IJK, je cherche d'abord l'intersection de (IJK) avec le plan (FBC).

- $I \in (FBC)$
- $I \in (IJK)$
- $J \in (FBC)$
- $J \in (IJK)$

II - Géométrie vectorielle.

(AB): droite $[AB]$
 [AB]: segment

1- Rappel.

Un vecteur de l'espace est également caractérisé par:



- sa direction
- son sens de A vers B.
- sa norme: $\|\vec{AB}\| = AB$.

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont égaux ssi ils ont:

- m direction
- m sens
- m valeur

Propriété: $\vec{AB} = \vec{CD} \iff ABCD$ est un parallélogramme

Relation de Chasles: $\forall M \in P, \vec{AM} + \vec{MP} = \vec{AP}$