Dimanche 24 novembre 2024.

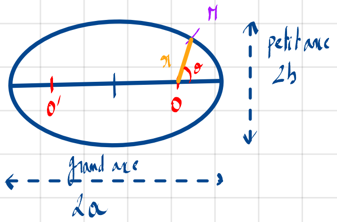
Tale G - Spé Physique.

Satellisation et lois de Kepler.

I- Lois de Kepler

1- 1ère Loi de Kepler

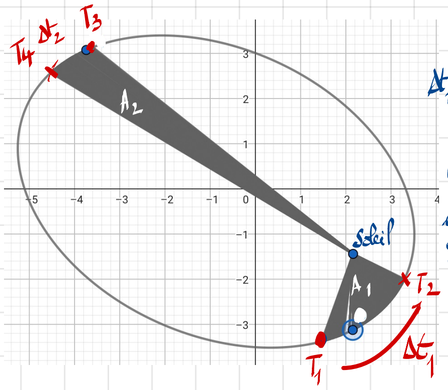
Les planètes et les satellites décrivent une orbite elliptique plane dont le centre attracteur est l'un des foyers.



Remarque : O et O' sont les 2 foyers de l'ellipse. L'un des deux, ici O, est l'astre attracteur. a est le demi-grand axe et b est le demi-petit axe.

2. Deuxième loi de Kepler.

Le segment rayon qui relie le centre de l'astre attracteur au centre de l'astre orbiteur balaie des aires égales pendant des durées égales.



$\Delta t_1 = \Delta t_2 \iff A_1 = A_2$

Conséquence, le mouvement des planètes autour du Soleil n'est pas uniforme.

Géométriquement $\overset{\frown}{T_1T_2} > \overset{\frown}{T_3T_4}$

$\iff \dfrac{\overset{\frown}{T_1T_2}}{\Delta t} > \dfrac{\overset{\frown}{T_3T_4}}{\Delta t}$

$v_{1\to 2} > v_{3\to 4}$

3) Troisième Loi de Kepler.

Le carré de la période de révolution de l'astre orbiteur rapporté au cube du demi-grand axe est une constante.

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = cste}$$

1) a est le demi-grand axe.

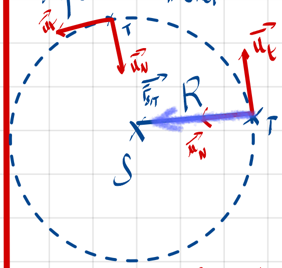
2) La constante cste n'est pas universelle mais ne fonctionne qu'autour d'un même astre attracteur.

II- Étude du mouvement circulaire uniforme

Dans cette étude, nous allons nous intéresser à un cas particulier dont vous pourrez faire une généralité pour la résol° des exercices. Ainsi, on :

Système : {Terre de masse m_T}.

Référentiel : héliocentrique supposé galiléen auquel on associe un repère de Frenet.



On fait l'approximation d'une trajectoire circulaire compte tenu de la faible excentricité de l'ellipse constituant la trajectoire de la Terre.

Repère de Frenet : $(T ; \vec{u_t} ; \vec{u_N})$. Dans le repère de Frenet, l'accélération a pour expression : $\boxed{\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u_N} + \frac{dv}{dt}\vec{u_t}}$

Bdf : $\vec{F_{S/T}} = G \times \dfrac{m_T \times m_S}{R^2}\vec{u_N}$

2ème Loi de Newton : $\sum \vec{F_{ext}} = m_T \times \vec{a}$

$$\frac{G\cancel{m_T}\,m_S}{R^2}\vec{u_N} = \cancel{m_T} \times \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{G \times m_S}{R^2}\vec{u_N}} + 0\,\vec{u_t}$$

Or $\vec{a} = \dfrac{v^2}{R}\vec{u_N} + \dfrac{dv}{dt}\vec{u_t}$

$$\begin{cases} \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{G m_S}{R^2} \\ \dfrac{dv}{dt} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v = \sqrt{\dfrac{G m_S}{R}} \\ v = cste \end{cases}$$

Ainsi, la vitesse de la Terre est constante lorsqu'elle tourne autour du Soleil. Or il existe une autre façon de calculer cette vitesse parce qu'elle est constante.

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\pi \times R}{T}$$

$$\sqrt{\frac{G m_S}{R}} = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\frac{G m_S}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

$$\frac{G m_S}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2}$$

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G m_S}}$$

EXERCICE B – MESURE DE LA MASSE DE JUPITER ET DU SOLEIL (5 points)


Les lunettes de Galilée (musée de Florence)

En 1610, Galilée a été le premier à observer les quatre principaux satellites de Jupiter (Io, Europe, Ganymède et Callisto) en utilisant une lunette astronomique qu'il avait lui-même fabriquée.

À la suite de Galilée, les observations de ces quatre satellites ont permis de réaliser les mesures regroupées dans le tableau ci-dessous.

Satellite	Période de révolution T en jours (j)	Demi-grand axe a de la trajectoire elliptique ($\times 10^5$ km)
Io	1,75	4,22
Europe	3,55	6,71
Ganymède	7,16	10,7
Callisto	16,7	18,8

A l'aide d'un tableur, on a positionné les mesures dans un graphique donnant les variations de T^2 en fonction de celles de a^3 pour les quatre satellites de Jupiter. Le tableur permet de superposer à ces points de mesure une modélisation par une droite (Cf. figure 1 ci-dessous).

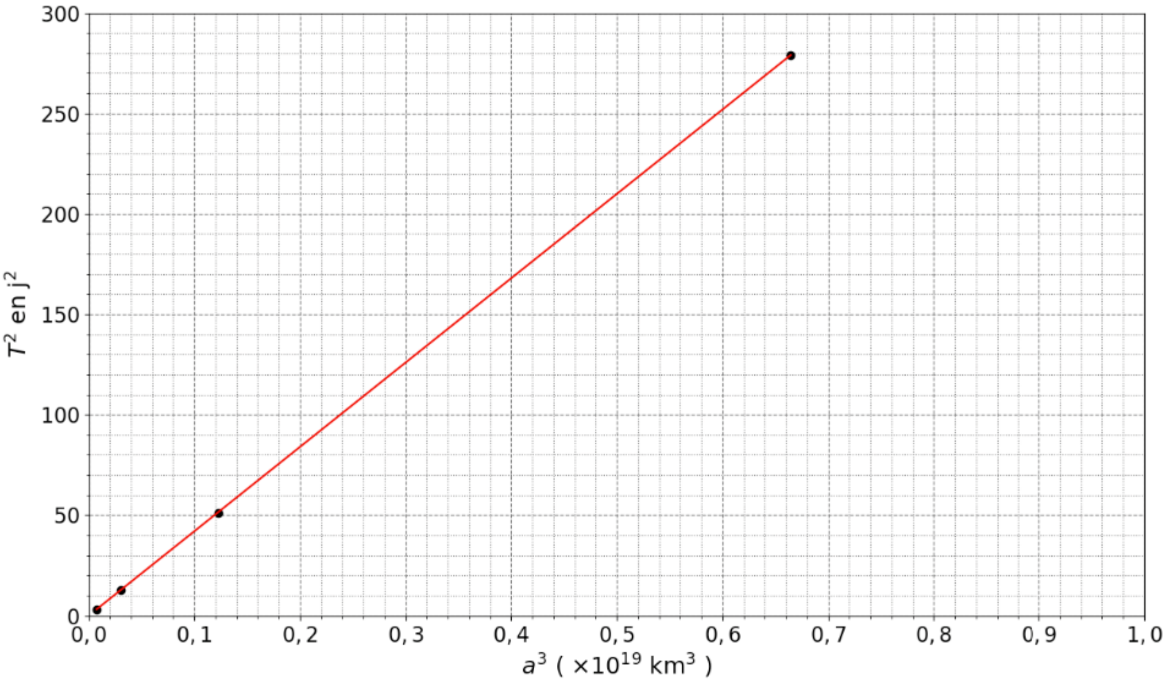


Figure 1. T^2 en fonction de a^3.

Donnée : Constante de gravitation universelle $G = 6{,}67\times10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}

Exploitation des résultats expérimentaux

1. À partir des résultats expérimentaux (figure 1), préciser la relation qui existe entre T^2 et a^3 pour les quatre satellites de Jupiter. Donner le nom de la loi correspondante (établie en 1618).

Modélisation du mouvement d'un satellite de Jupiter

On se place dans le cadre théorique de la mécanique de Newton (publiée en 1687) pour retrouver la relation évoquée dans la question 1 et déterminer la masse M_J de Jupiter.

On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel joviocentrique (centré sur Jupiter), supposé galiléen. On fait l'approximation que le mouvement du centre *S* du satellite est circulaire, centré sur le centre *J* de Jupiter, et on considère que la seule force qui s'applique sur le satellite est la force de gravitation $\overrightarrow{F_{J/S}}$ exercée par Jupiter sur le satellite.

On désigne par *r* la distance entre les centres des deux astres, par M_J la masse de Jupiter et par *m* la masse du satellite.

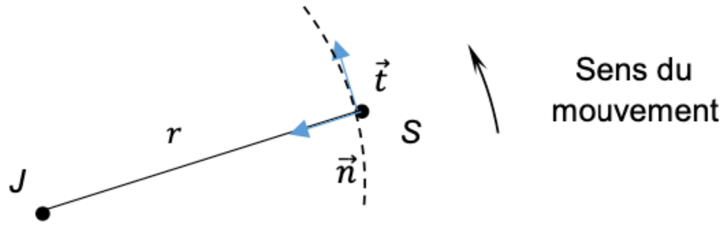


Figure 2.

2. Sur un schéma, reprendre les éléments donnés sur la figure 2 et représenter sans souci d'échelle :
- Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_S}$ du satellite ;
- La force de gravitation $\overrightarrow{F_{J/S}}$ exercée par Jupiter sur le satellite.

3. Donner l'expression de la force de gravitation $\overrightarrow{F_{J/S}}$ exercée par Jupiter sur le satellite en fonction de M_J, *m*, *G, r* et $\vec{n}$
4. Appliquer la deuxième loi de Newton et en déduire l'expression de la vitesse V_S du satellite en fonction de G, M_J et r.
5. En déduire que, dans le cadre de l'approximation du mouvement circulaire, le quotient $\frac{T^2}{a^3}$ est égal à $\frac{4\pi^2}{GM_J}$.
6. À l'aide des résultats expérimentaux, calculer la valeur de la masse M_J de Jupiter. Commenter un éventuel écart à la valeur tabulée : 1,898 6 x 10^{27} kg.

   Aide éventuelle : 1 $j^2 . km^{-3}$ = 7,46 $s^2 . m^{-3}$

La relation établie à la question 5 pour le système composé de Jupiter et de ses satellites est universelle et est applicable à d'autres systèmes constitués de satellites en orbite autour d'un astre central.

7. Déterminer la masse du Soleil.

Donnée : la distance entre la Terre et le Soleil est de 150 millions de kilomètres.

Le candidat est invité à faire preuve d'initiative, à justifier ses choix et à présenter sa démarche. Certaines valeurs numériques nécessaires aux calculs sont supposées connues du candidat.