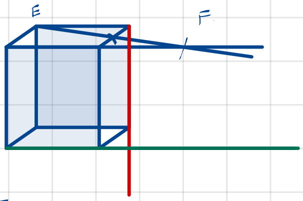
10/11/24.

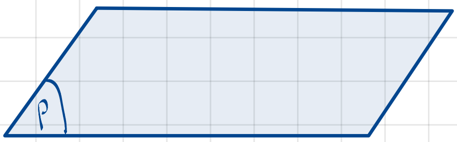
Géométrie dans l'espace.



I. Rappels de géométrie euclidienne.

1- Le plan.

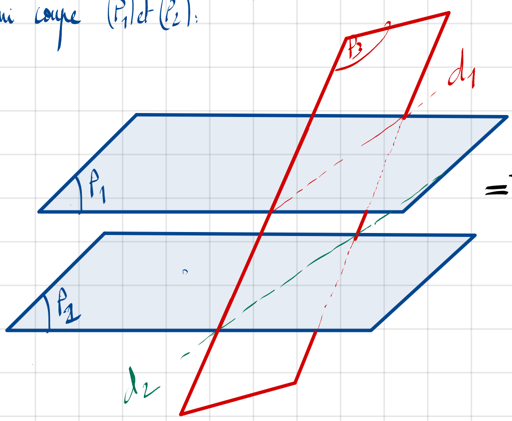
Trois points non alignés définissent un plan noté (P).
Si les points A, B et C définissent le plan (P) alors (P) = (ABC).



2) Parallélisme de deux plans.

Théorème.

Soient (P_1) et (P_2) deux plans parallèles. Soit (P_3) un troisième plan qui coupe (P_1) et (P_2).



$\Rightarrow (d_1) \parallel (d_2)$

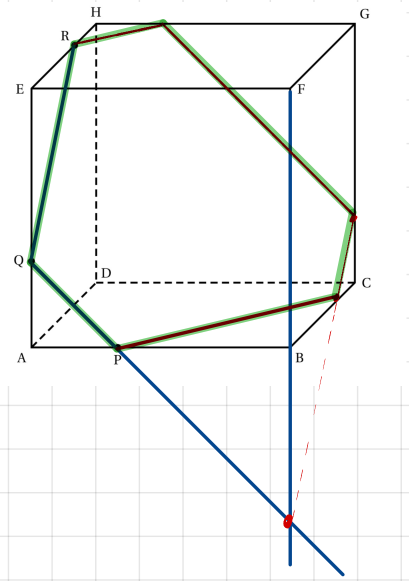
3) Section d'un cube par un plan.

Méthode pour tracer la section d'un cube par un plan P.

1) L'intersection des faces du cube avec le plan sont des segments de droites.

2) Pour tracer ces segments qui constituent l'intersection, il faut trouver 2 points distincts qui appartiennent au plan P et aux faces du cube concernées.

3) La section du cube par un plan est un polygone.



II - Géométrie vectorielle.

1) Déf° vecteur dans l'espace.

Un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par : - sa direction (AB)
- son sens de A vers B.
- sa norme $\|\vec{AB}\| = AB$.

Théorème : $\vec{AB} = \vec{CD} \iff ABDC$ est un parallélogramme

Relat° de Chasles : $\forall M \in P$, $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$.

Déf : Combinaison linéaire de deux vecteurs :

Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. Une combinaison linéaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$ t.q :

$$\boxed{\vec{W} = a\vec{u} + b\vec{v}}$$

$\iff$

$\vec{w}$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

2) Colinéarité

Déf : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q : $\vec{u} = k\vec{v}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ si et seulement si.

$\begin{cases} xy' - x'y = 0 \\ yz' - zy' = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} zx' - z'x = 0 \end{cases}$

Théorème : $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires $\iff$ $(AB) // (CD)$

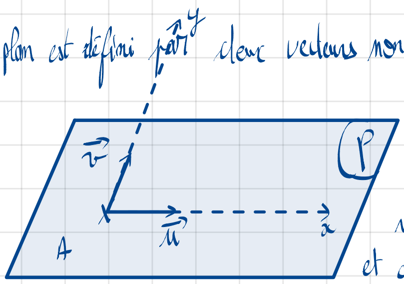
$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires $\iff$ A, B, C sont alignés.

3) Droite

Définition : Dans l'espace, une droite est définie par un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un point $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}$.

4) Plan

Théorème : Un plan est défini par deux vecteurs non colinéaires et d'un point.



On dit que $(A;\vec{u};\vec{v})$ est un repère du plan P et que $(\vec{u};\vec{v})$ est une base du plan P.

III – Relation entre droites et plan.

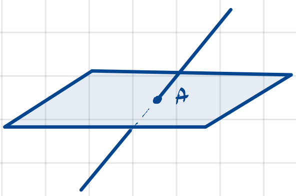
1) Relat° entre droites

appartenir au même plan

- coplanaires
  - sécantes
  - parallèles
- non coplanaires.

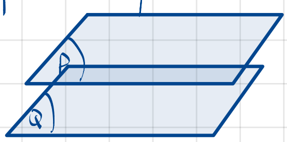
2) Relation entre une droite et un plan

Une droite et un plan peuvent être
- parallèles.
- sécantes.

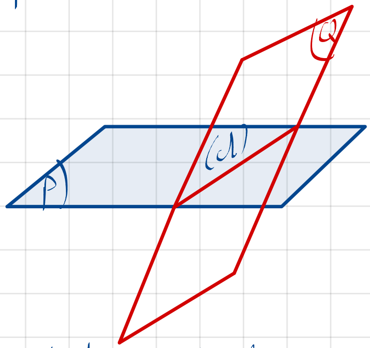


3) Relation entre deux plans

Théorème : - Deux plans peuvent être parallèles

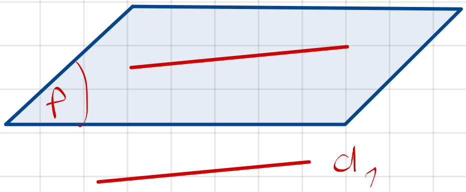


- Deux plans peuvent être sécants :

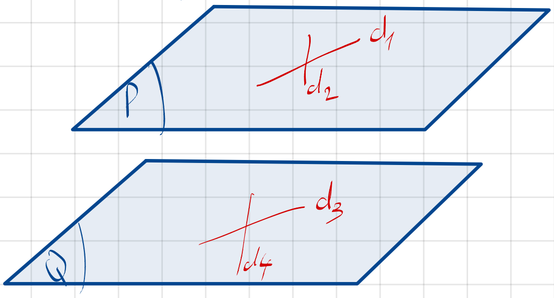


4) Parallélisme de droites et de plan

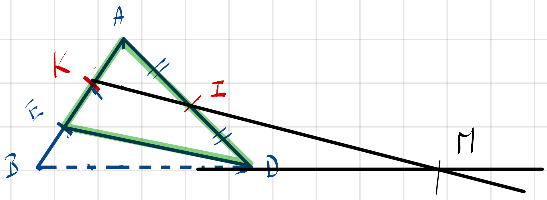
- Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite de ce plan.



- Deux plans sont parallèles ssi : 2 droites sécantes de P sont parallèles à 2 droites sécantes du plan Q.



n°4 :



$K = m[EA]$
$I = m[AD]$.

$$\frac{AK}{AE} = \frac{AI}{AD}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, $(KI)//(ED)$.
K, I et M sont alignés par définition.
donc $(KM) // (ED)$

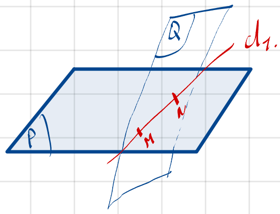
Dans le triangle BKM, $(KM) // (ED)$.
Les points B, E, K et B, D, M sont alignés. D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{BE}{BK} = \frac{BD}{BM}$

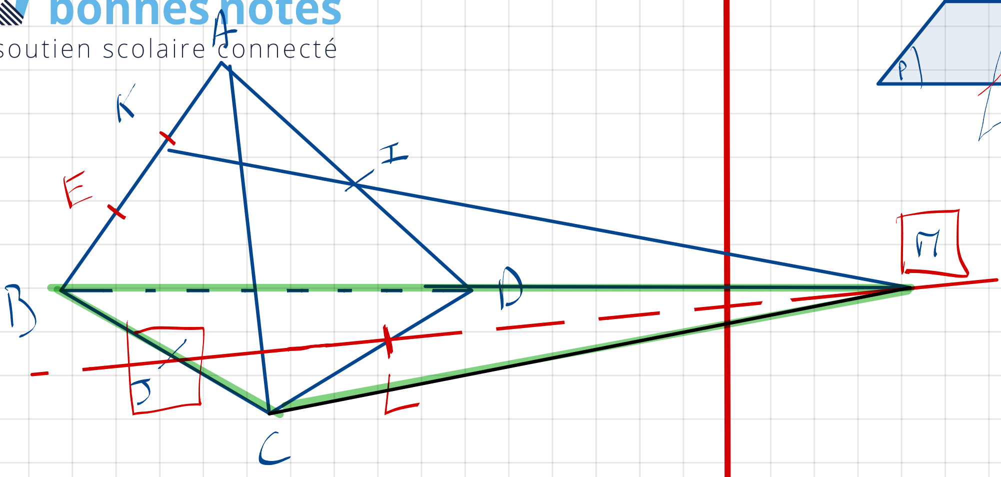
$$\frac{1}{2} = \frac{BD}{BM}$$

$$2BD = BM$$

$$\boxed{D = m[BM]}$$

2) a) voir dessin.





Dans le triangle BCM, (MJ) est la médiane issue de M.

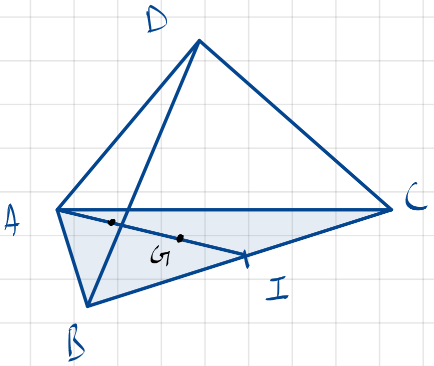
(CD) est la médiane issue de C.

$L = (CD) \cap (MJ)$

L est le centre de gravité du triangle BCM.

donc $CL = \frac{2}{3} CD$.

n°6 :



$\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} = \vec{0}$.

1) a) $\vec{KG} + \vec{GA} + \vec{KG} + \vec{GB} + \vec{KG} + \vec{GC} + \vec{KD} = \vec{0}$

$3\vec{KG} + \vec{KD} = \vec{0}$.

b) $\vec{KG} = -\frac{1}{3}\vec{KD}$.

$\vec{KG}$ et $\vec{KD}$ sont colinéaires. donc les points K, G et D sont alignés.

2) $\vec{KD} + \vec{DG} = -\frac{1}{3}\vec{KD}$.

$\vec{DG} = -\frac{1}{3}\vec{KD} - \vec{KD}$.

$\vec{DG} = \frac{-4}{3}\vec{KD}$.

$$\boxed{\vec{DG} = \frac{4}{3}\vec{DK}}$$

IV – Repérage dans l'espace

1 – Base et repère

Définition : 3 vecteurs $\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}$ non coplanaires forment une base de l'espace. On note cette base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

En associant un point O à cette base, on génère un repère de l'espace :

$$(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}).$$

2. Coordonnées d'un point

Un point M sera donc repéré par 3 coordonnées :

$M(x\,;y\,;z)$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Propriétés : $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

$I = m[AB]$

$I\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_B + y_A}{2} \\ \frac{z_B + z_A}{2} \end{pmatrix}$

$\vec{u}(a\,;b\,;c)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

V – Représentation paramétrique

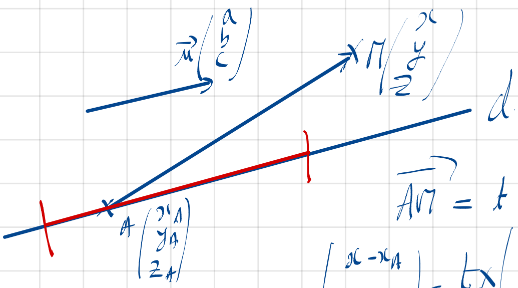
1) Droite.

Rappel : Une droite d est caractérisée par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Alors une représentation paramétrique de d est :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.}$$

Explication :



$$\vec{AM} = t\,\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$$

n°11 :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

1) a) I $\left|\begin{array}{lll} x = 1 - 3 \times 0 & & = 1 \\ y = -2 + 2 \times 0 & & = -2 \\ z = -1 - 0 & & = -1. \end{array}\right.$

b) Vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $x = 5$

$\iff 1 - 3t = 5$

$$\boxed{t = \frac{-4}{3}}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 + 2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{14}{3}. \\ z = -1 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

2) $1 - 3t = -10.$

$t = \frac{11}{3}$

=